Третий Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Бой за 5–8 места. Премьер-лига. 24 сентября 2008 г.

1. Окружность, проходящая через вершины B и C треугольника ABC, вторично пересекает его стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Точки H и H_1 – ортоцентры треугольников ABC и AB_1C_1 соответственно. Докажите, что прямые BB_1, CC_1 и HH_1 пересекаются в одной точке.

2. Дан выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Точка B_i получается из точки A_i отражением относительно середины диагонали $A_{i-1}A_{i+1}$ (полагаем $A_0 = A_6$, $A_7 = A_1$). Оказалось, что никакие три из точек B_i не лежат на одной прямой. Докажите, что точки B_i можно разбить на две группы так, что треугольники, образованные точками каждой группы, равны.

3. Незнайка нарисовал на плоскости 30 непересекающихся отрезков. Знайка подсчитал, сколько раз эти отрезки пересекаются с прямыми, содержащими другие отрезки. Какое наибольшее число могло получиться у Знайки?

4. Пифагор расставил по окружности 1000 точек, покрашенных в красный и синий цвета. С тех пор раз в год в день рождения Пифагора все точки, у которых был сосед другого цвета, одновременно меняют свой цвет (с красного на синий, а с синего на красный). Докажите, что в 2010 году точки будут окрашены так же, как в 2008 году.

5. $a_1, a_2, \dots$ — неубывающая последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число k встречается ровно k раз (ее начало выглядит так: $1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots$). Найдите все простые числа, которые можно представить в виде $a_1 + a_2 + \dots + a_t$.

6. На доске написано выражение $*3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3^1 * 1$. Два игрока по очереди заменяют звездочки знаками $+$ и $-$, а когда все знаки расставлены, подсчитывают результат. Если результат не делится на 7, выигрывает первый игрок, а если делится, то второй. Кто выиграет при правильной игре?

7. Найдите максимальное значение выражения

$$\frac{a}{bcd+1} + \frac{b}{cda+1} + \frac{c}{dab+1} + \frac{d}{abc+1}$$

при $a, b, c, d \in [0, 1]$.

8. У хулигана Саши есть кубик Рубика (каждая его грань разбита на 9 квадратиков). Он хочет, не отрывая карандаша от поверхности, нарисовать по диагонали в каждом из квадратиков (нельзя проводить других линий, а также проводить одну и ту же диагональ дважды). Удастся ли ему это?

Третий Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Бой за 5–8 места. Премьер-лига. 24 сентября 2008 г.

1. Окружность, проходящая через вершины B и C треугольника ABC, вторично пересекает его стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Точки H и H_1 – ортоцентры треугольников ABC и AB_1C_1 соответственно. Докажите, что прямые BB_1, CC_1 и HH_1 пересекаются в одной точке.

2. Дан выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Точка B_i получается из точки A_i отражением относительно середины диагонали $A_{i-1}A_{i+1}$ (полагаем $A_0 = A_6$, $A_7 = A_1$). Оказалось, что никакие три из точек B_i не лежат на одной прямой. Докажите, что точки B_i можно разбить на две группы так, что треугольники, образованные точками каждой группы, равны.

3. Незнайка нарисовал на плоскости 30 непересекающихся отрезков. Знайка подсчитал, сколько раз эти отрезки пересекаются с прямыми, содержащими другие отрезки. Какое наибольшее число могло получиться у Знайки?

4. Пифагор расставил по окружности 1000 точек, покрашенных в красный и синий цвета. С тех пор раз в год в день рождения Пифагора все точки, у которых был сосед другого цвета, одновременно меняют свой цвет (с красного на синий, а с синего на красный). Докажите, что в 2010 году точки будут окрашены так же, как в 2008 году.

5. $a_1, a_2, \ldots$ — неубывающая последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число k встречается ровно k раз (ее начало выглядит так: $1, 2, 2, 3, 3, 3, \ldots$). Найдите все простые числа, которые можно представить в виде $a_1 + a_2 + \cdots + a_t$.

6. На доске написано выражение $*3^5 * 3^4 * 3^3 * 3^2 * 3^1 * 1$. Два игрока по очереди заменяют звездочки знаками $+$ и $-$, а когда все знаки расставлены, подсчитывают результат. Если результат не делится на 7, выигрывает первый игрок, а если делится, то второй. Кто выиграет при правильной игре?

7. Найдите максимальное значение выражения

$$\frac{a}{bcd+1} + \frac{b}{cda+1} + \frac{c}{dab+1} + \frac{d}{abc+1}$$

при $a, b, c, d \in [0, 1]$.

8. У хулигана Саши есть кубик Рубика (каждая его грань разбита на 9 квадратиков). Он хочет, не отрывая карандаша от поверхности, нарисовать по диагонали в каждом из квадратиков (нельзя проводить других линий, а также проводить одну и ту же диагональ дважды). Удастся ли ему это?