

## Третий Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Бой за 5–8 места. Гранд-лига. 24 сентября 2008 г.

Полуфинал. Премьер-лига. 24 сентября 2008 г.

1. Окружность, проходящая через вершины  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$ , вторично пересекает его стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $C_1$  и  $B_1$  соответственно. Точки  $H$  и  $H_1$  – ортоцентры треугольников  $ABC$  и  $AB_1C_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $HH_1$  пересекаются в одной точке.

2. При каком наименьшем  $n$  ребра полного графа на 2008 вершинах можно пометить числами от 1 до  $n$  так, чтобы для каждой трех вершин два из соединяющих их трех ребер были помечены одинаковыми числами, а третье – меньшим?

3. Найдите максимальное значение выражения

$$\frac{a}{bcd+1} + \frac{b}{cda+1} + \frac{c}{dab+1} + \frac{d}{abc+1}$$

при  $a, b, c, d \in [0, 1]$ .

4. На клетчатом поле лежит полный комплект домино (каждая доминошка занимает 2 клетки). Назовем  $i$ -й *областью* множество всех клеток с цифрой  $i$ . Область назовем *связной*, если из любой её клетки можно попасть в любую другую, каждый раз переходя в соседнюю по стороне клетку, принадлежащую этой же области. Какое наибольшее число связных областей может найтись?

5. Выражения  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  получены из переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с помощью функций  $\max$  и  $\min$ . Известно, что  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при всех  $x_i \in \{0, 1\}$ . Докажите, что  $P(x_1, \dots, x_n) = Q(x_1, \dots, x_n)$  при всех вещественных  $x_i$ .

6. Дан выпуклый шестиугольник  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ . Точка  $B_i$  получается из точки  $A_i$  отражением относительно середины диагонали  $A_{i-1}A_{i+1}$  (полагаем  $A_0 = A_6$ ,  $A_7 = A_1$ ). Оказалось, что никакие три из точек  $B_i$  не лежат на одной прямой. Докажите, что точки  $B_i$  можно разбить на две группы так, что треугольники, образованные точками каждой группы, равны.

7. На координатной плоскости нарисовали 2008 графиков квадратных трехчленов. Может ли оказаться, что для каждого из них существует прямая, имеющая общие точки с любым графиком, кроме него?

8. Числа  $p$  и  $p+2$  – простые. Докажите, что существуют несколько (больше одного!) последовательных натуральных чисел, произведение которых дает остаток  $p^2 + p - 1$  при делении на  $p(p+2)$ .

9.  $a_1, a_2, \dots$  – неубывающая последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число  $k$  встречается ровно  $k$  раз (ее начало выглядит так: 1, 2, 2, 3, 3, 3, ...). Найдите все простые числа, которые можно представить в виде  $a_1 + a_2 + \dots + a_t$ .

10. Пифагор расставил по окружности 1000 точек, покрашенных в красный и синий цвета. С тех пор раз в год в день рождения Пифагора все точки, у которых был сосед другого цвета, одновременно меняют свой цвет (с красного на синий, а с синего на красный). Докажите, что в 2010 году точки будут окрашены так же, как в 2008 году.

## Третий Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Бой за 5–8 места. Гранд-лига. 24 сентября 2008 г.

Полуфинал. Премьер-лига. 24 сентября 2008 г.

1. Окружность, проходящая через вершины  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$ , вторично пересекает его стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $C_1$  и  $B_1$  соответственно. Точки  $H$  и  $H_1$  – ортоцентры треугольников  $ABC$  и  $AB_1C_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $HH_1$  пересекаются в одной точке.

2. При каком наименьшем  $n$  ребра полного графа на 2008 вершинах можно пометить числами от 1 до  $n$  так, чтобы для каждой трех вершин два из соединяющих их трех ребер были помечены одинаковыми числами, а третье – меньшим?

3. Найдите максимальное значение выражения

$$\frac{a}{bcd+1} + \frac{b}{cda+1} + \frac{c}{dab+1} + \frac{d}{abc+1}$$

при  $a, b, c, d \in [0, 1]$ .

4. На клетчатом поле лежит полный комплект домино (каждая доминошка занимает 2 клетки). Назовем  $i$ -й областью множество всех клеток с цифрой  $i$ . Область назовем *связной*, если из любой её клетки можно попасть в любую другую, каждый раз переходя в соседнюю по стороне клетку, принадлежащую этой же области. Какое наибольшее число связных областей может найтись?

5. Выражения  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  получены из переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с помощью функций  $\max$  и  $\min$ . Известно, что  $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при всех  $x_i \in \{0, 1\}$ . Докажите, что  $P(x_1, \dots, x_n) = Q(x_1, \dots, x_n)$  при всех вещественных  $x_i$ .

6. Дан выпуклый шестиугольник  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ . Точка  $B_i$  получается из точки  $A_i$  отражением относительно середины диагонали  $A_{i-1}A_{i+1}$  (полагаем  $A_0 = A_6$ ,  $A_7 = A_1$ ). Оказалось, что никакие три из точек  $B_i$  не лежат на одной прямой. Докажите, что точки  $B_i$  можно разбить на две группы так, что треугольники, образованные точками каждой группы, равны.

7. На координатной плоскости нарисовали 2008 графиков квадратных трехчленов. Может ли оказаться, что для каждого из них существует прямая, имеющая общие точки с любым графиком, кроме него?

8. Числа  $p$  и  $p+2$  – простые. Докажите, что существуют несколько (больше одного!) последовательных натуральных чисел, произведение которых дает остаток  $p^2 + p - 1$  при делении на  $p(p+2)$ .

9.  $a_1, a_2, \dots$  – неубывающая последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число  $k$  встречается ровно  $k$  раз (ее начало выглядит так: 1, 2, 2, 3, 3, 3, ...). Найдите все простые числа, которые можно представить в виде  $a_1 + a_2 + \dots + a_t$ .

10. Пифагор расставил по окружности 1000 точек, покрашенных в красный и синий цвета. С тех пор раз в год в день рождения Пифагора все точки, у которых был сосед другого цвета, одновременно меняют свой цвет (с красного на синий, а с синего на красный). Докажите, что в 2010 году точки будут окрашены так же, как в 2008 году.