Третий Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Третий тур. Гранд-лига. 23 сентября 2008 г.

1. Точка D – середина стороны BC треугольника ABC; I_B и I_C – центры вписанных окружностей треугольников ABD и ACD; K_B и K_C – центры их вневписанных окружностей, касающихся сторон AB и AC соответственно. Докажите, что точки I_B, I_C, K_B и K_C лежат на одной окружности.

2. Найдите все пары простых чисел p, q, для которых $p^p + q^q + 1$ делится на pq.

3. Набор гирь, каждая из которых весит натуральное число килограммов, называют *полным*, если из этих гирь можно составить любой натуральный вес от 1 кг до суммы весов всех гирь набора. Из полного набора выбросили гирю наибольшего веса. Докажите, что набор остался полным.

4. Из точки P проведены две касательные к окружности, касающиеся ее в точках A и B. Для каждой точки X на меньшей дуге AB построены точки C и D – основания перпендикуляров, опущенных из P на прямые AX и BX соответственно. Докажите, что все прямые CD, построенные для всевозможных положений точки X, проходят через одну точку.

5. Дан выпуклый многоугольник площади 1. Докажите, что существует такой прямоугольник площади 1, что площадь его пересечения с данным многоугольником не менее 3/4.

6. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами таков, что $P(x) \geqslant 0$ при всех $x \geqslant 0$. Докажите, что существуют такие многочлены $A(x)$ и $B(x)$ с вещественными коэффиентами, что $P(x) = A(x)^2 + xB(x)^2$.

7. Пусть $n > 3$ – натуральное число и a_1, a_2, $\ldots$, a_n – вещественные числа такие, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$ и $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant n^2$. Докажите, что $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \geqslant 2$.

8. Дано множество $S = \{1, 2, \ldots, 2008\}$. Сколько существует функций $f : S \to S$ таких, что $x + f(f(f(f(x)))) = 2009$ при всех $x \in S$?

9. Правильный треугольник разбит на n^2 равных правильных треугольничков прямыми, параллельными его сторонам. Для каких n эти треугольнички можно занумеровать всеми числами от 1 до n^2 так, чтобы каждые два треугольничка, номера которых отличаются на 1 или 2, имели общую точку?

10. Найдите все непустые множества A натуральных чисел, больших 1, такие, что для каждого $n \in A$ числа $n^2 + 4$ и $[\sqrt{n}\,] + 1$ тоже лежат в A (здесь $[t]$, как обычно, обозначает целую часть числа t).

Третий Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Третий тур. Гранд-лига. 23 сентября 2008 г.

1. Точка D – середина стороны BC треугольника ABC; I_B и I_C – центры вписанных окружностей треугольников ABD и ACD; K_B и K_C – центры их вневписанных окружностей, касающихся сторон AB и AC соответственно. Докажите, что точки I_B, I_C, K_B и K_C лежат на одной окружности.

2. Найдите все пары простых чисел p, q, для которых $p^p + q^q + 1$ делится на pq.

3. Набор гирь, каждая из которых весит натуральное число килограммов, называют *полным*, если из этих гирь можно составить любой натуральный вес от 1 кг до суммы весов всех гирь набора. Из полного набора выбросили гирю наибольшего веса. Докажите, что набор остался полным.

4. Из точки P проведены две касательные к окружности, касающиеся ее в точках A и B. Для каждой точки X на меньшей дуге AB построены точки C и D – основания перпендикуляров, опущенных из P на прямые AX и BX соответственно. Докажите, что все прямые CD, построенные для всевозможных положений точки X, проходят через одну точку.

5. Дан выпуклый многоугольник площади 1. Докажите, что существует такой прямоугольник площади 1, что площадь его пересечения с данным многоугольником не менее 3/4.

6. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами таков, что $P(x) \geqslant 0$ при всех $x \geqslant 0$. Докажите, что существуют такие многочлены $A(x)$ и $B(x)$ с вещественными коэффиентами, что $P(x) = A(x)^2 + xB(x)^2$.

7. Пусть $n > 3$ – натуральное число и a_1, a_2, …, a_n – вещественные числа такие, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$ и $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant n^2$. Докажите, что $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \geqslant 2$.

8. Дано множество $S = \{1, 2, \ldots, 2008\}$. Сколько существует функций $f : S \to S$ таких, что $x + f(f(f(f(x)))) = 2009$ при всех $x \in S$?

9. Правильный треугольник разбит на n^2 равных правильных треугольничков прямыми, параллельными его сторонам. Для каких n эти треугольнички можно занумеровать всеми числами от 1 до n^2 так, чтобы каждые два треугольничка, номера которых отличаются на 1 или 2, имели общую точку?

10. Найдите все непустые множества A натуральных чисел, больших 1, такие, что для каждого $n \in A$ числа $n^2 + 4$ и $[\sqrt{n}\,] + 1$ тоже лежат в A (здесь $[t]$, как обычно, обозначает целую часть числа t).