Третий Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Полуфинал. Гранд-лига. 24 сентября 2008 г.

1. Окружность, проходящая через вершины B и C треугольника ABC, вторично пересекает его стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Точки H и H_1 – ортоцентры треугольников ABC и AB_1C_1 соответственно. Докажите, что прямые BB_1, CC_1 и HH_1 пересекаются в одной точке.

2. При каком наименьшем n ребра полного графа на 2008 вершинах можно пометить числами от 1 до n так, чтобы для каждых трех вершин два из соединяющих их трех ребер были помечены одинаковыми числами, а третье – меньшим?

3. Пусть $n \geqslant 2$ – четное число. Многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + 1$ имеет вещественный корень. Найдите наименьшее возможное значение выражения $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2$.

4. На клетчатом поле лежит полный комплект домино (каждая доминошка занимает 2 клетки). Назовем *i-й областью* множество всех клеток с цифрой i. Область назовем *связной*, если из любой её клетки можно попасть в любую другую, каждый раз переходя в соседнюю по стороне клетку, принадлежащую этой же области. Какое наибольшее число связных областей может найтись?

5. Выражения $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получены из переменных x_1, x_2, …, x_n с помощью функций max и min. Известно, что $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при всех $x_i \in \{0, 1\}$. Докажите, что $P(x_1, \ldots, x_n) = Q(x_1, \ldots, x_n)$ при всех вещественных x_i.

6. Пусть P_1, P_2, …, P_n – различные точки плоскости, $n \geqslant 2$. Докажите, что

$$\max_{1\leqslant i<j\leqslant n} P_iP_j > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n}-1) \min_{1\leqslant i<j\leqslant n} P_iP_j.$$

7. Числа p и $p+2$ — простые. Докажите, что существуют несколько (больше одного!) последовательных натуральных чисел, произведение которых дает остаток p^2+p-1 при делении на $p(p+2)$.

8. Дан выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Точка B_i получается из точки A_i отражением относительно середины диагонали $A_{i-1}A_{i+1}$ (полагаем $A_0 = A_6$, $A_7 = A_1$). Оказалось, что никакие три из точек B_i не лежат на одной прямой. Докажите, что точки B_i можно разбить на две группы так, что треугольники, образованные точками каждой группы, равны.

9. На координатной плоскости нарисовали 2008 графиков квадратных трехчленов. Может ли оказаться, что для каждого из них существует прямая, имеющая общие точки с любым графиком, кроме него?

10. Пусть треугольники T и T_0 подобны и одинаково ориентированы, причём ортоцентр первого совпадает с центром описанной окружности второго. Каждая вершина треугольника T отражается симметрично относительно соответственной стороны треугольника T_0. Докажите, что три построенные таким образом точки образуют треугольник T', подобный исходному.

Третий Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Полуфинал. Гранд-лига. 24 сентября 2008 г.

1. Окружность, проходящая через вершины B и C треугольника ABC, вторично пересекает его стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Точки H и H_1 – ортоцентры треугольников ABC и AB_1C_1 соответственно. Докажите, что прямые BB_1, CC_1 и HH_1 пересекаются в одной точке.

2. При каком наименьшем n ребра полного графа на 2008 вершинах можно пометить числами от 1 до n так, чтобы для каждых трех вершин два из соединяющих их трех ребер были помечены одинаковыми числами, а третье – меньшим?

3. Пусть $n \geqslant 2$ – четное число. Многочлен $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + 1$ имеет вещественный корень. Найдите наименьшее возможное значение выражения $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2$.

4. На клетчатом поле лежит полный комплект домино (каждая доминошка занимает 2 клетки). Назовем *i-й областью* множество всех клеток с цифрой i. Область назовем *связной*, если из любой её клетки можно попасть в любую другую, каждый раз переходя в соседнюю по стороне клетку, принадлежащую этой же области. Какое наибольшее число связных областей может найтись?

5. Выражения $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получены из переменных x_1, x_2, …, x_n с помощью функций max и min. Известно, что $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при всех $x_i \in \{0, 1\}$. Докажите, что $P(x_1, \ldots, x_n) = Q(x_1, \ldots, x_n)$ при всех вещественных x_i.

6. Пусть P_1, P_2, …, P_n – различные точки плоскости, $n \geqslant 2$. Докажите, что

$$\max_{1\leqslant i<j\leqslant n} P_iP_j > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n}-1) \min_{1\leqslant i<j\leqslant n} P_iP_j.$$

7. Числа p и $p+2$ — простые. Докажите, что существуют несколько (больше одного!) последовательных натуральных чисел, произведение которых дает остаток p^2+p-1 при делении на $p(p+2)$.

8. Дан выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Точка B_i получается из точки A_i отражением относительно середины диагонали $A_{i-1}A_{i+1}$ (полагаем $A_0 = A_6$, $A_7 = A_1$). Оказалось, что никакие три из точек B_i не лежат на одной прямой. Докажите, что точки B_i можно разбить на две группы так, что треугольники, образованные точками каждой группы, равны.

9. На координатной плоскости нарисовали 2008 графиков квадратных трехчленов. Может ли оказаться, что для каждого из них существует прямая, имеющая общие точки с любым графиком, кроме него?

10. Пусть треугольники T и T_0 подобны и одинаково ориентированы, причём ортоцентр первого совпадает с центром описанной окружности второго. Каждая вершина треугольника T отражается симметрично относительно соответственной стороны треугольника T_0. Докажите, что три построенные таким образом точки образуют треугольник T', подобный исходному.