

Третий Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Первый тур. Гранд-лига. 20 сентября 2008 г.

1. Треугольник ABC таков, что $AB + BC = 3AC$. Его вписанная окружность касается сторон AB , BC , CA в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Точки K и L этой окружности диаметрально противоположны точкам A_1 и C_1 . Докажите, что точки A , K , L и C лежат на одной окружности.

2. Приемник работает, если в него вставлены две заряженные батарейки. У нас в запасе $2n$ батареек, из которых n заряжены и n разряжены, но какие именно заряжены – неизвестно. Можно попытаться включить приемник, вставив в него какие-нибудь две батарейки. Какого наименьшего количества попыток заведомо хватит, чтобы приемник заработал?

3. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{2007} f(x_i + x_{i+1}) + f\left(\sum_{i=1}^{2008} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{2008} f(2x_i)$$

при всех вещественных $x_1, x_2, \dots, x_{2008}$.

4. Найдите все натуральные $n \geq 3$, для которых многочлен $W(x) = x^n - 3x^{n-1} + 2x^{n-2} + 6$ представляется в виде произведения двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами.

5. Решите уравнение $[2x] + [3x] + [5x] = 2008$.




6. Все целые числа раскрашены в четыре цвета. Пусть x и y – различные нечетные натуральные числа. Докажите, что существуют два целых числа одного цвета, разность которых равна одному из чисел x , y , $x + y$, $x - y$.

7. Докажите, что если a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$) – положительные числа и $t = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, то

$$\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} \geq \frac{(n-1)^2 t}{t-1}.$$

8. На медиане CM треугольника ABC (в котором $AC \neq BC$) взята точка P такая, что биссектрисы углов $\angle PAC$ и $\angle PBC$ пересекаются в точке Q на медиане CM . Найдите угол APB , если $\angle ACB = \gamma$.

9. Пусть n и k – натуральные числа, а p – простое. Докажите, что если число $2^{2^n} + 1$ содержит p ровно в k -й степени (т.е. делится на p^k и не делится на p^{k+1}), то число $2^{p-1} - 1$ тоже содержит его ровно в k -й степени.

10. Прямоугольник 2007×2008 разрезан на фигурки видов ,  и . Какое наибольшее количество фигурок может быть в разрезании?