Третий Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Финал. Гранд-лига. 25 сентября 2008 г.

1. Найдите 2008-значное число, отношение которого к сумме его цифр минимально.

2. На грани (но не на ребре) правильного тетраэдра отмечена точка. Докажите, что тетраэдр можно разрезать на четыре равных выпуклых многогранника так, что эта точка будет вершиной одного из них.

3. В клетки полоски 1×2008 двое игроков по очереди записывают буквы О и Г (нельзя в одну клетку записывать две буквы). Если после очередного хода в некоторых трех подряд идущих клетках появляется слово «ОГО», то игрок, сделавший этот ход, выигрывает. Если все клетки заполнены, и никто не выиграл, то объявляется ничья. Имеется ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

4. Дано натуральное n. Последовательность из n натуральных (возможно, совпадающих) чисел полна, если для любого $k \geqslant 2$ выполняется следующее условие: если число k встречается в последовательности, то левее последнего числа k встречается хотя бы одно число $k-1$. Найдите количество полных последовательностей (из n чисел).

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Перпендикуляр из точки I к прямой BC пересекает биссектрису угла BDC в точке X. Описаная окружность треугольника CDX пересекает прямую BC в точке Y. Докажите, что треугольник DXY — равнобедренный.

6. Существует ли такая последовательность попарно взаимно простых натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$, что при любом натуральном n многочлен $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ не раскладывается в произведение двух непостоянных многочленов с целыми коэффициентами?

7. Дана окружность ω и три точки A_1, A_2, A_3 на ней (мы будем считать $A_{i+3} = A_i$). Окружность ω_1 находится внутри ω и касается ее в точке A_1. Окружность ω_{i+1} касается ω в точке A_{i+1}, а также касается окружности ω_i. Докажите, что $\omega_n = \omega_1$ при некотором n.

8. Положительные числа x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $xy + yz + zx = 2$. Какие значения может принимать выражение $\max\{x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy\}$?

9. Даны числовые множества A, B, причем $|A| = n$, $|B| = k$. Известно, что для любого $a \in A$ существуют $b, b' \in B$ такие, что $b + b' = a$. Кроме того, для любого ненулевого числа x существуют не больше d пар $a, a' \in A$ таких, что $a - a' = x$. Докажите, что $k^3d \geqslant n^2$.

10. Дано натуральное $a > 1$. Докажите, что можно выбрать бесконечно много попарно взаимно простых чисел вида $a^{n+1} + a^n - 1$ (при натуральных n).