Третий Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Третий тур. Премьер-лига. 23 сентября 2008 г.

1. Точка D – середина стороны BC треугольника ABC; I_B и I_C – центры вписанных окружностей треугольников ABD и ACD; K_B и K_C – центры их вневписанных окружностей, касающихся сторон AB и AC соответственно. Докажите, что точки I_B, I_C, K_B и K_C лежат на одной окружности.

2. 100-значное натуральное число разбили на группы по три цифры, начиная с разряда единиц; цифра старшего разряда составила отдельную, 34-ю группу. Эти группы в обратном порядке приписали в конец исходного числа. (Например, если проделать это с числом 1234567, получится число 12345675672341.) Докажите, что получившееся 200-значное число не делится на 13.

3. В окружности с центром O проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Через точку M на диаметре AB, отличную от A и B, проведена прямая CM, пересекающая окружность вторично в точке N. Касательная к окружности в точке N и перпендикуляр к AM, восставленный в точке M, пересекаются в точке P. Докажите, что $OP = CM$.

4. Набор гирь, каждая из которых весит натуральное число килограммов, называют *полным*, если из этих гирь можно составить любой натуральный вес от 1 кг до суммы весов всех гирь набора. Из полного набора выбросили гирю наибольшего веса. Докажите, что набор остался полным.

5. Различные числа x и y таковы, что $\{x\} = \{y\}$ и $\{x^3\} = \{y^3\}$ (здесь $\{t\}$, как обычно, обозначает дробную часть числа t). Докажите, что x – корень квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

6. Имеются две палочки. Разрешается прикладывать их друг к другу и делать отметки на любой из них, но запрещается использовать любые посторонние предметы; например, запрещается использовать линейку с делениями, а также прикладывать палочку к листу бумаги и делать отметки на листе. Как узнать, что больше – длина первой палочки или $4/7$ длины второй палочки?

7. Правильный треугольник разбит на n^2 равных правильных треугольничков прямыми, параллельными его сторонам. Для каких n эти треугольнички можно занумеровать всеми числами от 1 до n^2 так, чтобы каждые два треугольничка, номера которых отличаются на 1 или 2, имели общую точку?

8. Найдите все непустые множества A натуральных чисел, больших 1, такие, что для каждого $n \in A$ числа $n^2 + 4$ и $[\sqrt{n}] + 1$ тоже лежат в A (здесь $[t]$, как обычно, обозначает целую часть числа t).

Третий Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Третий тур. Премьер-лига. 23 сентября 2008 г.

1. Точка D – середина стороны BC треугольника ABC; I_B и I_C – центры вписанных окружностей треугольников ABD и ACD; K_B и K_C – центры их вневписанных окружностей, касающихся сторон AB и AC соответственно. Докажите, что точки I_B, I_C, K_B и K_C лежат на одной окружности.

2. 100-значное натуральное число разбили на группы по три цифры, начиная с разряда единиц; цифра старшего разряда составила отдельную, 34-ю группу. Эти группы в обратном порядке приписали в конец исходного числа. (Например, если проделать это с числом 1234567, получится число 12345675672341.) Докажите, что получившееся 200-значное число не делится на 13.

3. В окружности с центром O проведены перпендикулярные диаметры AB и CD. Через точку M на диаметре AB, отличную от A и B, проведена прямая CM, пересекающая окружность вторично в точке N. Касательная к окружности в точке N и перпендикуляр к AM, восставленный в точке M, пересекаются в точке P. Докажите, что $OP = CM$.

4. Набор гирь, каждая из которых весит натуральное число килограммов, называют *полным*, если из этих гирь можно составить любой натуральный вес от 1 кг до суммы весов всех гирь набора. Из полного набора выбросили гирю наибольшего веса. Докажите, что набор остался полным.

5. Различные числа x и y таковы, что $\{x\} = \{y\}$ и $\{x^3\} = \{y^3\}$ (здесь $\{t\}$, как обычно, обозначает дробную часть числа t). Докажите, что x – корень квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

6. Имеются две палочки. Разрешается прикладывать их друг к другу и делать отметки на любой из них, но запрещается использовать любые посторонние предметы; например, запрещается использовать линейку с делениями, а также прикладывать палочку к листу бумаги и делать отметки на листе. Как узнать, что больше – длина первой палочки или 4/7 длины второй палочки?

7. Правильный треугольник разбит на n^2 равных правильных треугольничков прямыми, параллельными его сторонам. Для каких n эти треугольнички можно занумеровать всеми числами от 1 до n^2 так, чтобы каждые два треугольничка, номера которых отличаются на 1 или 2, имели общую точку?

8. Найдите все непустые множества A натуральных чисел, больших 1, такие, что для каждого $n \in A$ числа $n^2 + 4$ и $[\sqrt{n}\,] + 1$ тоже лежат в A (здесь $[t]$, как обычно, обозначает целую часть числа t).