

Третий Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Второй тур. Премьер-лига. 21 сентября 2008 г.

1. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на доске 10×10 так, чтобы ни в какой строке и ни в каком столбце не нашлось 7 отмеченных клеток подряд?

2. Вася и Петя нарисовали по выпуклому четырехугольнику. Каждый из них записал на листочке длины всех сторон своего четырехугольника и двух его диагоналей. В результате на их листочках оказались два одинаковых набора из 6 различных чисел. Могут ли четырехугольники Васи и Пети быть различны?

3. Целые числа a, b, c, d удовлетворяют условиям $bc + ad = ac + 2bd = 1$. Докажите, что $a^2 + c^2 = 2b^2 + 2d^2$.

4. В математическом кружке занимается 21 ученик, некоторые из которых дружат между собой. Известно, что ребята, имеющие одинаковое число друзей, не дружат между собой, а имеющие разное число друзей – дружат. Докажите, что из кружка нельзя выбрать две непересекающиеся команды по 6 человек так, чтобы в одной все школьники дружили, а в другой все школьники не дружили между собой.

5. В прямоугольном треугольнике ABC катет AB меньше катета AC . На стороне AC нашлась точка D такая, что $\angle ACB = \angle ABD$. Точка E – основание высоты DE треугольника BCD . Найдите углы ABC и ACB , если известно, что $AC = BD + DE$.

6. Все точки окружности раскрашены в белый и голубой цвета так, что у каждого вписанного в окружность равностороннего треугольника не менее двух белых вершин. Докажите, что в окружность можно вписать квадрат, у которого не менее трех белых вершин.

7. Верно ли, что для каждого приведенного квадратного трехчлена $f(x)$ существует x такое, для которого числа $f(x)$, $f(f(x))$ и $f(f(f(x)))$ – стороны треугольника?

8. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC , CA и AB в точках D , E и F соответственно. Точка X внутри треугольника ABC такова, что вписанная окружность треугольника XBC тоже касается стороны BC в точке D . Y и Z – точки касания вписанной окружности треугольника XBC со сторонами CX и XB соответственно. Докажите, что четырехугольник $EFZY$ – вписанный.