

Третий Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Финал. Премьер-лига. 25 сентября 2008 г.

1. Найдите 2008-значное число, отношение которого к сумме его цифр минимально.

2. Дана треугольная пирамида $SABC$. В ее боковых гранях SAB , SBC , SCA проведены высоты AA_B и BB_A , BB_C и CC_B , CC_A и AA_C , соответственно. Докажите, что прямые $A_B B_A$, $B_C C_B$ и $C_A A_C$ параллельны одной плоскости.

3. В клетки полоски 1×2008 двое игроков по очереди записывают буквы О и Г (нельзя в одну клетку записывать две буквы). Если после очередного хода в некоторых трех подряд идущих клетках появляется слово «ОГО», то игрок, сделавший этот ход, выигрывает. Если все клетки заполнены, и никто не выиграл, то объявляется ничья. Имеется ли у кого-нибудь из игроков выигрышная стратегия, и если да, то у кого?

4. Имеются три пары одинаковых по виду кубиков: 2 красных, 2 синих и 2 зеленых, причем в каждой паре один кубик тяжелый и один легкий (все тяжелые кубики весят одинаково, и все легкие также весят одинаково). Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить все легкие кубики?

5. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Перпендикуляр из точки I к прямой BC пересекает биссектрису угла BDC в точке X . Описанная окружность треугольника CDX пересекает прямую BC в точке Y . Докажите, что треугольник DXY — равнобедренный.

6. В дереве n вершин, степень каждой вершины не больше трех, при этом ровно у k вершин степень равна 1. Сколько существует способов окрасить все его ребра в три цвета так, чтобы цвета любых двух ребер, имеющих общую вершину, были различными?

7. Последовательность (a_i) задана условиями $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $a_n a_{n+3} - a_{n+1} a_{n+2} = n!$ при всех $n \geq 0$. Докажите, что все ее члены целые.

8. Положительные числа x , y , z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $xy + yz + zx = 2$. Найдите максимальное возможное значение выражения $x^2 - yz$.

9. Дан треугольник ABC . Для переменной точки P на его вписанной окружности строятся точки пересечения медиан треугольников APB , APC и BPC . Найдите геометрическое место этих точек.

10. Существуют ли такие 2008 натуральных чисел, что их сумма и сумма их квадратов являются квадратами натуральных чисел?