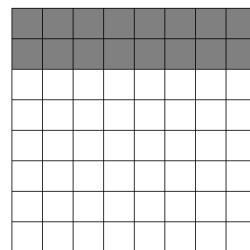


0–0. Найдите количество решений ребуса: $Д \times В \times А \times П \times Я \times Т \times Ь = Д \times Е \times С \times Я \times Т \times Ь$. (Одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры). Ответ дать числом в десятичной записи. (1453824. В ребусе 9 различных букв, 4 из них (Д, Я, Т, Ь) встречаются в обеих частях равенства, а 5 только в одной из них (В, А, П, Е, С). Выясним, сколько есть решений, когда одна из букв равна 0. В этом случае она должна встречаться и в левой, и в правой части, т.е. это одна из букв Д, Я, Т, Ь (4 способа). А для остальных восьми букв выбираем 8 значений цифр из 9 оставшихся – а это $9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 = 9!$ способов. Таким образом, случай с наличием нуля даёт $4 \cdot 9! = 1451520$ решений. Если же нуля нет, то используются все 9 ненулевых цифр, при это $В \times А \times П = Е \times С \neq 0$. В этих произведениях не должно быть 5 и 7, т. к. эти простые числа не являются делителями других ненулевых цифр. Кроме того, произведение пяти этих цифр (взятых из 7 оставшихся ненулевых цифр) должно быть полным квадратом. Перебрав всевозможные варианты, получим 8 подходящих: $1 \cdot 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$, $1 \cdot 3 \cdot 6 = 2 \cdot 9$, $2 \cdot 3 \cdot 6 = 4 \cdot 9$, $3 \cdot 4 \cdot 6 = 8 \cdot 9$, $1 \cdot 4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$, $1 \cdot 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$, $1 \cdot 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$, $1 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$. Учитывая, что цифры левой части можно переставлять $3! = 6$ способами, правой – $2! = 2$ способами, а четыре оставшиеся ненулевые цифры на местах Д, Я, Т, Ь можно переставлять $4! = 24$ способами, то случай без нуля даёт $4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 8 = 2304$ решения. А вместе имеем 1453824 решения.)

0–1. Сколько граней у нового незаточенного шестигранного карандаша? (8 граней, т.к. он является шестигранной призмой и имеет ещё две небоковые грани – верхнюю и нижнюю)

0–2. Отметьте 16 клеток шахматной доски так, чтобы не нашлось ни одного остроугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток. (Можно взять любые два соседних ряда доски – см. рис.)

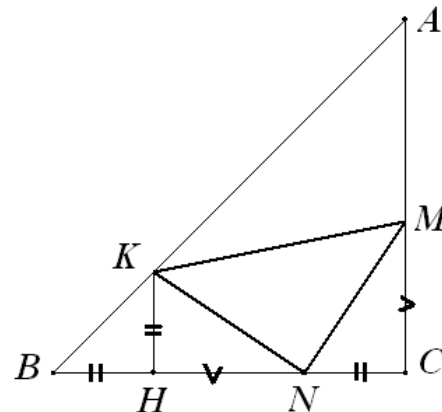


0–3. Найдите наибольшее натуральное число, не превосходящее 2010, равное произведению цифр некоторого натурального числа. ($2000 = 2^4 \cdot 5^3$ равно произведению цифр числа 2222555, остальные числа до 2010 делятся на простое число, содержащее не менее двух цифр: $2010 \square 67$, $2009 \square 41$, $2008 \square 251$, $2007 \square 223$, $2006 \square 17$, $2005 \square 401$, $2004 \square 167$, $2003 \square 2003$, $2002 \square 11$, $2001 \square 23$.)

0–4. Про четырёхзначное число N с различными цифрами известно, что числа 1234, 5678, 9012, 3456, 7890 содержат ровно по две цифры, принадлежащие этому числу, однако ни одна из них не стоит на том же месте, что и в числе N . Найдите все возможные значения N . (Такого числа не существует, т.к. каждая цифра встречается всего два раза, значит, наши четыре цифры из числа N встретятся в других числах 8 раз, а должны в этих пяти числах встретиться 10 раз.)

0–5. Найдите все положительные числа a такие, что неравенство $a^x \geq ax$ справедливо при всех положительных x . ($a = e$. Заметим, что графики функций $y = a^x$ и $y = ax$ всегда пересекаются в точке $(1; a)$. Неравенство выполняется при всех положительных x , если в точке $(1; a)$ прямая $y = ax$ касается графика функции $y = a^x$. Приравняв производные, находим, что $a \cdot \ln a = a$, т.е. $a = e$.)

0–6. Внутри катета BC прямоугольного равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) найдите все такие положения точки N , что существует прямоугольный равнобедренный треугольник KMN с гипотенузой KM , концы которой лежат (внутри) на сторонах AB и AC исходного треугольника. (N может быть любой точкой между C и серединой катета BC . Пусть H – проекция на катет BC точки K , лежащей на гипотенузе AB (см. рис.). Т.к. $\angle KNM = 90^\circ$, то точка H лежит между B и N . Треугольник BKH – прямоугольный равнобедренный, треугольники KNH и NMC равны (по гипотенузе и прилежащим углам). Значит, $BH = HK = NC$, т.е. точки H и N симметричны относительно середины отрезка BC . Заметим при этом, что для любого положения точки N между C и серединой BC из наших рассуждений следует алгоритм построения сначала точки H (центрально симметричной точке N относительно середины катета BC), затем K и M , значит, соответствующий равнобедренный прямоугольный треугольник KMN будет существовать.)



1-1. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AC и BF пересекаются в точке P . Найдите отношение $AP:PC$. (1:2. Подсчёт углов показывает, что $AP=PB=BK=PK=KC$, где K – точка пересечения диагоналей AC и BD , значит, $PC=2AP$.)

1-2. Сколько существует шестизначных чисел, произведение цифр которых равно 6? ($36=6+A_6^2=6+30$, т.к. это либо числа с одной 6 и пятью 1 (всего 6 чисел), либо числа с одной 2, одной 3 и четырьмя 1 (всего их – количество размещений из 6 по 2 – $A_6^2=6 \cdot 5=30$).

1-3. Какое наибольшее число слонов (на доске должны быть слоны обоих цветов – чёрного и белого) можно расставить на шахматной доске так, чтобы чёрные не били белых, а белые – чёрных? Приведите ответ и пример. (64 слона, например, чёрные – на чёрном цвете, а белые – на белом)

1-4. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) , для которых число 2^a+3^b – точный квадрат. ($a=4, b=2$. Квадрат не может давать остаток 2 при делении на 3, поэтому a – чётно, т.е. $a=2m$, где m – натуральное число. Квадрат не может давать остаток 3 при делении на 4, поэтому b – чётно, т.е. $b=2n$, где n – натуральное число. Тогда $2^{2m}+3^{2n}=k^2-3^{2n}=(k-3^n)(k+3^n)$. Каждый множитель – степень двойки, но их разность $2 \cdot 3^n$ делится на 2, но не делится на 4, поэтому $k-3^n=2, k+3^n=2^{2m-1}$. Отсюда $3^n+1=2^{2m-2}$. Нетрудно проверить, что 3^n+1 не делится на 8, поэтому $2m-2 \leq 2$, т.е. $m \leq 2$, откуда далее и следует ответ.)

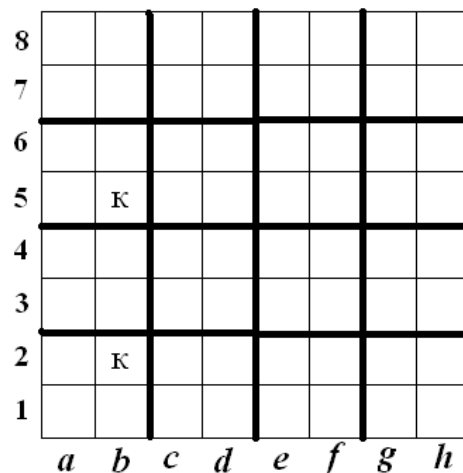
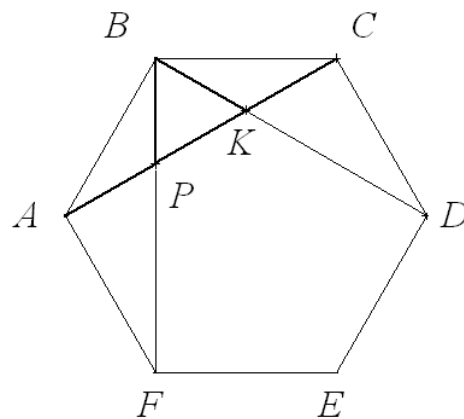
1-5. Найдите наибольшее натуральное число, на которое выражение $n(n^2-49)(n^2+49)$ делится при любом натуральном n . (30. Пусть $a_n = n(n^2-49)(n^2+49)$, тогда $a_1 = -48 \cdot 50 = -2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$, $a_2 = -2 \cdot 45 \cdot 53 = -2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 53$, $\text{НОД}(a_1, a_2) = 30$, значит, наибольший общий делитель всех этих чисел не превосходит 30. Перебором остатков по каждому из трёх модулей нетрудно показать, что a_n делится и на 2, и на 3, и на 5, значит, $a_n : 30$ при любом натуральном n .)

1-6. Найдите наибольшее натуральное число из различных цифр, в котором любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 3. (875421. Для выполнения признака делимости на 3 соседние цифры либо обе делятся на 3, тогда это число не более 9630, либо их остатки (1 и 2, которые встречаются по 3 раза) при делении на 3 дополняют друг друга, т.е. чередуются, тогда это число не более чем 6-значное, а наибольшим таким число будет 875421.)

2-2. Какую фигуру задаёт в трёхмерном пространстве неравенство $|x|+|y|+|z| \leq 1$? Дайте её верное название. (октаэдр с вершинами на осях координат, удалёнными от центра на 1)

2-3. В правильном треугольнике со стороной, равной 6, на одной из сторон взята точка на расстоянии 1 от ближайшей вершины. Найдите расстояние от этой точки до центра треугольника. ($\sqrt{7}$. Это расстояние найдём по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника с катетами 2 и $\sqrt{3}$ (радиус вписанной окружности).)

2-4. Поставьте на шахматную доску двух не бьющих друг друга королей так, чтобы после этого нельзя было поставить на доску 16 королей, не бьющих друг друга. (Поставим королей на клетки $b2$ и $b5$. Докажем, что на доску теперь можно поставить максимум 15 королей так, чтобы все поставленные короли не били друг друга. Разобьём доску на 16 квадратов 2×2 (см. рис.). Тогда в каждый квадрат можно поставить не более одного короля, при этом во второй снизу квадрат у левого края поставить короля нельзя, т.к. все его клетки уже побиты двумя поставленными королями. Значит, на доску теперь можно поставить не более 15 не бьющих друг друга королей.)



2-5. Во всех клетках квадрата 3×3 расставляются различные натуральные числа от 1 до N так, что в каждой паре соседних по стороне чисел одно делится на другое. При каком наименьшем N такое возможно? Приведите ответ и пример расстановки чисел. (15, пример – на рисунке. Перебором можно доказать, что при $N \leq 14$ в таблице невозможно разместить числа 5, 10, 7, 14, 11, 13, значит, не все клетки будут заняты.)

15	3	12
5	1	4
10	2	8

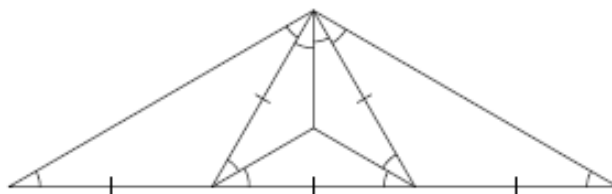
2–6. Найдите наибольшее десятизначное число, в котором любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 6. (9666666666)

3–3. Сколько существует десятизначных чисел, кратных 3, в записи которых могут быть использованы только цифры 1, 2 и 3? ($3^9=19683$. Каждая из первых девяти цифр может быть выбрана 3 способами, а последняя цифра определяется однозначно в зависимости от остатка при делении на 3 суммы первых девяти цифр.)

3–4. Найдите наименьшее λ такое, что неравенство $a+b+c \leq \lambda$ выполняется для любых неотрицательных чисел a, b и c , сумма квадратов которых равна 1. ($\sqrt{3}$. Из неравенства между средним арифметическим и средним квадратическим $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ следует, что $a+b+c \leq \sqrt{3}$, при этом значение $\sqrt{3}$ достигается при значениях переменных, равных $\frac{1}{\sqrt{3}}$,

значит, наименьшее возможное значение для λ равно $\sqrt{3}$.)

3–5. Разбейте какой-нибудь непрямоугольный треугольник на 5 треугольников, подобных исходному. (например, равнобедренный треугольник с углом 120° разбивается на пять подобных ему)



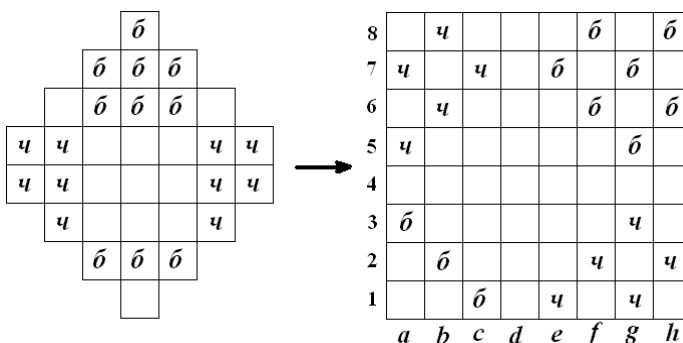
3–6. Укажите множество значений, которые может принимать выражение $1-2-3+4+5-6-7+8+\dots \pm n$, где последний знак зависит от натурального числа $n \geq 5$, а минусы и плюсы чередуются парами. (Все неположительные целые числа, кратные 4, кроме (-4) ; все натуральные числа, сравнимые с 1 по модулю 4 и большие 1, и (-1) . Сгруппируем все члены, кроме одного-трёх последних в зависимости от n , в четвёрки: $(1-2-3+4) + (5-6-7+8) + \dots$. Поскольку значения всех выражений в скобках равны 0, то значение выражения зависит от числа n . Вся сумма будет равна 0, если $n \equiv 0 \pmod{4}$; n , если $n \equiv 1 \pmod{4}$; -1 , если $n \equiv 2 \pmod{4}$; $-1-n$, если $n \equiv 3 \pmod{4}$.)

4–4. Найдите какой-нибудь многочлен 4-й степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Приведите выкладки, из которых следует наличие этого корня.

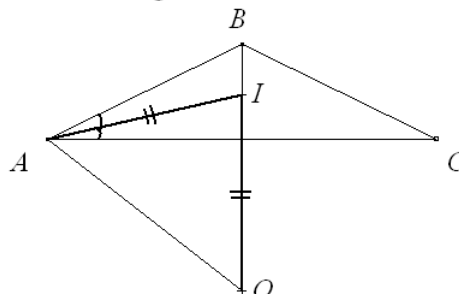
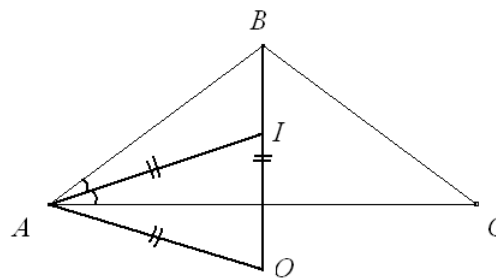
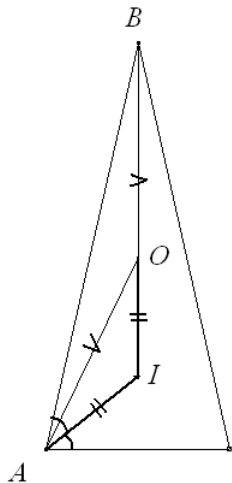
$(x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8)$. Рассмотрим многочлен 4-й степени $P_4(x) = (x-1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x-1+\sqrt{2}-\sqrt{3})$, у которого число $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ является корнем. Тогда после преобразований получим, что $P_4(x) = ((x-1)^2 - 5 - 2\sqrt{6})((x-1)^2 - 5 + 2\sqrt{6}) = (x^2 - 2x - 4)^2 - 24 = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8$.)

4–5. Строки квадратной таблицы размером 2011×2011 занумеровали различными целыми числами (не обязательно идущими подряд). Теми же числами занумеровали её столбцы. После этого в каждой клетке таблицы записали сумму номеров её строки и столбца. Каких чисел (чётных или нечётных) в клетках таблицы могло быть записано больше и на сколько? (Чётных чисел больше на k^2 , где k – нечётное натуральное число от 1 до 2011. Пусть при нумерации строк (и соответственно столбцов) было использовано n чётных чисел и $2011-n$ нечётных чисел, тогда в клетках окажется $n^2 + (2011-n)^2$ чётных чисел и $2n(2011-n)$ нечётных чисел, но разность этих полученных чисел равна $(n - (2011-n))^2 = (2n - 2011)^2$ и может быть полным квадратом любого нечётного натурального числа, не превосходящего 2011.)

4–6. При каком наибольшем N на чёрных клетках шахматной доски можно расставить N чёрных и N белых слонов так, чтобы чёрные слоны не били белых, а белые – чёрных? Приведите ответ и пример. (10. Сначала рассмотрим доску из 32 клеток, на которой слон фактически является ладьёй. После этого построим соответствующий пример уже на шахматной доске.)

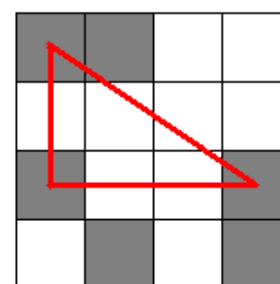
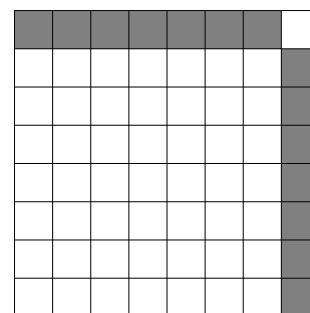


5-5. Найдите углы равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$), если треугольник AOI также будет равнобедренным, где O и I – центры вписанной и описанной окружностей. ($(540^\circ/7, 540^\circ/7, 180^\circ/7)$, $(180^\circ/7, 180^\circ/7, 900^\circ/7)$ и $(36^\circ, 36^\circ, 108^\circ)$. Возможны три случая равнобедренности. 1). $AI=IO$, когда O расположена между B и I . Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle BAO = \angle ABO = 90^\circ - \alpha$, $\angle AOI = \angle AIO = \angle BAC/2 - \angle BAO = \alpha/2 - (90^\circ - \alpha) = 3\alpha/2 - 90^\circ$, но $\angle AOI$ как внешний угол $\triangle ABO$ равен $2(90^\circ - \alpha)$. Получаем уравнение $2(90^\circ - \alpha) = 3\alpha/2 - 90^\circ$, откуда $\alpha = 540^\circ/7$.



В этом случае углы треугольника равны $540^\circ/7, 540^\circ/7$ и $180^\circ/7$. 2). $AI=AO$, когда I расположена между B и O . Тогда $\angle BAO = \angle ABO = 90^\circ - \alpha$, но $\angle BAO = \angle BAC + \angle CAO = \angle BAC + \angle CAI = 3\alpha/2$. Получаем уравнение $90^\circ - \alpha = 3\alpha/2$, откуда $\alpha = 36^\circ$. В этом случае углы треугольника равны $36^\circ, 36^\circ$ и 108° . 3). $AI=IO$, когда I расположена между B и O . Тогда $\angle BAO = \angle ABO = 90^\circ - \alpha$, $\angle AOI = \angle AIO = \angle BAO - \angle BAC/2 = (90^\circ - \alpha) - \alpha/2 = 90^\circ - 3\alpha/2$, но из $\triangle ABO$ следует, что $\angle AOI = 180^\circ - 2\angle ABO = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$. Получаем уравнение $90^\circ - 3\alpha/2 = 2\alpha$, откуда $\alpha = 180^\circ/7$. В этом случае углы треугольника равны $180^\circ/7, 180^\circ/7$ и $900^\circ/7$.

5-6. Какое наибольшее количество клеток шахматной доски можно отметить так, чтобы не нашлось ни одного прямоугольного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток? (14 клеток, например, все клетки верхнего и правого рядов, без общей угловой). Рассмотрим двудольный граф, в котором вершины двух долей – это строки и столбцы, а рёбра – отмеченные клетки. Тогда в этом графе не должно быть цикла, иначе три подряд идущих ребра цикла дадут прямоугольный треугольник из центров соответствующих отмеченных клеток на доске (см. рис.). Значит, наш граф представляет из себя лес, и наибольшее количество рёбер-клеток может быть только в случае одной компоненты связности – дерева, т.е. не более 16 (вершин) $- 1 = 15$ рёбер. Если бы был пример дерева на 15 рёбер без пути длины три, который даёт нам прямоугольный треугольник, то у нас было бы 15 висячих вершин, смежных с одной вершиной степени 15 (граф-«ёжик»). Но это невозможно, т.к. в нашем двудольном графе степень вершины не превышает 8 (в каждой доле по 8 вершин.) Значит, в графе не более 14 рёбер, а на доске не более 14 отмеченных клеток.)



6-6. Приведите пример функции $f(x)$, удовлетворяющей при всех действительных значениях x соотношению: $f(f(x)) = x^2 + 6x + 6$. Обоснуйте выполнение требуемого условия.

$(f(x) = |x + 3|^{\sqrt{2}} - 3)$, определенную при всех действительных значениях x . Тогда

$$f(f(x)) = \left(|x + 3|^{\sqrt{2}} - 3 + 3 \right)^{\sqrt{2}} - 3 = |x + 3|^2 - 3 = x^2 + 6x + 6.$$