Пятый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010
Первый тур. Гранд-лига. 22 сентября 2010 г.

1. На плоскость поставили параллелепипед $a \times b \times c$, где a, b, c — нечетные попарно взаимно простые числа. Центральная клетка каждой грани покрашена. Параллелепипед можно перекатывать (через его ребра), при этом всякий раз центральная клетка оставляет отпечаток на плоскости. Докажите, что каждую точку можно покрыть отпечатком.

2. Для каждого натурального n положим $a_n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1$. Докажите, что $\dfrac{a_n}{3}$ является суммой двух кубов натуральных чисел.

3. Известно, что многочлен $p(x) = x^{2010} \pm x^{2009} \pm x^{2008} \cdots \pm x^2 \pm x \pm 1$ не имеет вещественных корней. Какое максимальное количество отрицательных коэффициентов он может иметь?

4. Докажите, что существует бесконечно много чисел вида $n^2 + 1$, у которых нет делителей вида k^2+1, кроме самого числа (числа n и k – натуральные).

5. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. Точка G — проекция точки D на прямую EF. Докажите, что $\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}$.

6. Последовательность определена следующим образом: $a_1 = 2010$, $a_{i+1} = a_i - 2\sqrt{a_i} + 1$ для всех натуральных i. Найдите наименьшее натуральное число k такое, что $a_k < 1$.

7. Во всех точках плоскости поставили по числу так, что сумма чисел в вершинах любого правильного пятиугольника равна 0. Верно ли, что все числа равны нулю?

8. В остроугольном треугольнике ABC с углом B, равным $60°$, биссектриса BL пересекается с высотой CD в точке S. Докажите, что $SH = SO$, где H и O – ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC соответственно.

9. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$3(a+b+c) \geqslant 8\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

10. Для каждого непустого подмножества множества $\{-1, -2, \ldots, -n\}$ вычисляется произведение всех чисел, принадлежащих этому подмножеству. Найдите сумму всех таких произведений.