Пятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010

Первый тур. Премьер-лига. 22 сентября 2010 г.

1. Для каждого натурального n положим $a_n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1$. Докажите, что $\frac{a_n}{3}$ является суммой двух кубов натуральных чисел.

2. Известно, что многочлен $p(x) = x^{2010} \pm x^{2009} \pm x^{2008} \ldots \pm x^2 \pm x \pm 1$ не имеет вещественных корней. Какое максимальное количество отрицательных коэффициентов он может иметь?

3. Докажите, что существует бесконечно много чисел вида n^2+1, у которых нет делителей вида k^2+1, кроме самого числа (числа n и k – натуральные).

4. Дан треугольник ABC, в котором $AB + BC = 2AC$. Точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Докажите, что точка пересечения биссектрис углов AMN и CNM лежит на прямой AC.

5. Последовательность определена следующим образом: $a_1 = 1000000$, $a_{i+1} = a_i - 2\sqrt{a_i} + 1$ для всех натуральных i. Найдите a_{2010}.

6. Во всех точках плоскости поставили по числу так, что сумма чисел в вершинах любого квадрата равна 0. Верно ли, что все числа равны нулю?

7. В остроугольном треугольнике ABC с углом B, равным 60°, биссектриса BL пересекается с высотой CD в точке S. Докажите, что $SH = SO$, где H и O – ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC соответственно.

8. Каждая клетка доски $m \times n$ окрашена в черный или белый цвет. Обозначим через $f(m,n)$ количество таких расстановок, в которых найдется или черная строка, или черный столбец. Обозначим через $g(m,n)$ количество таких расстановок, в которых найдется или черная строка, или белый столбец. Докажите, что $g(m,n) \geqslant f(m,n)$.

Пятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010

Первый тур. Премьер-лига. 22 сентября 2010 г.

1. Для каждого натурального n положим $a_n = 1\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}2\underbrace{0\ldots0}_{n}1$. Докажите, что $\frac{a_n}{3}$ является суммой двух кубов натуральных чисел.

2. Известно, что многочлен $p(x) = x^{2010} \pm x^{2009} \pm x^{2008} \ldots \pm x^2 \pm x \pm 1$ не имеет вещественных корней. Какое максимальное количество отрицательных коэффициентов он может иметь?

3. Докажите, что существует бесконечно много чисел вида n^2+1, у которых нет делителей вида k^2+1, кроме самого числа (числа n и k – натуральные).

4. Дан треугольник ABC, в котором $AB + BC = 2AC$. Точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно. Докажите, что точка пересечения биссектрис углов AMN и CNM лежит на прямой AC.

5. Последовательность определена следующим образом: $a_1 = 1000000$, $a_{i+1} = a_i - 2\sqrt{a_i} + 1$ для всех натуральных i. Найдите a_{2010}.

6. Во всех точках плоскости поставили по числу так, что сумма чисел в вершинах любого квадрата равна 0. Верно ли, что все числа равны нулю?

7. В остроугольном треугольнике ABC с углом B, равным 60°, биссектриса BL пересекается с высотой CD в точке S. Докажите, что $SH = SO$, где H и O – ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC соответственно.

8. Каждая клетка доски $m \times n$ окрашена в черный или белый цвет. Обозначим через $f(m,n)$ количество таких расстановок, в которых найдется или черная строка, или черный столбец. Обозначим через $g(m,n)$ количество таких расстановок, в которых найдется или черная строка, или белый столбец. Докажите, что $g(m,n) \geqslant f(m,n)$.