

Пятый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 21-28.09.2010

1 тур

Старт лига

1. В выпуклом пятиугольнике четыре угла больше 115° . Верно ли, что наибольшая диагональ выходит из пятого угла?
2. Сколькими способами на доске 7×8 можно поставить 8 ладей так, чтобы каждая клетка доски была побита хотя бы одной ладьей?
3. Дельфин играет с компьютером, делая ходы по очереди. Компьютер выставляет на свободные клетки поля 9×9 несколько фишек (не более пяти), каждая одного из n заранее заданных цветов. После этого дельфин снимает любые несколько фишек (не более пяти) и расставляет их на какие-нибудь свободные поля. Если на поле образуется ряд из нескольких (не менее пяти) подряд идущих по вертикали или горизонтали одноцветных фишек, они исчезают. Дельфин проигрывает, если все клетки поля будут заняты фишками. При каком наибольшем n дельфин может играть сколь угодно долго?
4. На столе лежат три ряда камней. Всего 51 камень. В каждом ряду камни упорядочены по массе в порядке возрастания. За одно взвешивание разрешается сравнить вес двух камней. Можно ли не более чем за 99 взвешиваний гарантированно расположить все камни в порядке возрастания их масс.
5. Квадратную таблицу размером 3×3 заполнили цифрами от 1 до 9, записав каждую цифру ровно по одному разу. Может ли оказаться так, что произведение трех чисел, стоящих в любой строчке или любом столбце делилось на 4?
6. Во всех точках плоскости поставили по числу так, что сумма чисел в вершинах любого квадрата равно 0. Верно ли, что все числа равны нулю?
7. Даны положительные числа a, b, c, d каждое из которых меньше 1. Докажите, что число $1 - (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d)$ больше любого из исходных чисел.
8. Пусть $A = 10000000000000200000000000020000000000001$. Докажите, что число $\frac{A}{3}$ является суммой двух кубов натуральных чисел.