Пятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010

Второй тур. Премьер-лига. 23 сентября 2010 г.

1. Взаимно простые числа a и b таковы, что число $\frac{a+b}{a-b}$ – целое. Докажите, что либо число $ab+1$, либо число $4ab+1$ – квадрат целого числа.

2. Вася сдавал тесты по алгебре, геометрии и химии. Каждый тест состоял из нескольких вопросов, по разным дисциплинам могло быть разное количество вопросов. Оказалось, что по алгебре он дал 50% верных ответов, по геометрии – 70%, по химии – 80%. Известно также, что он дал 62% верных ответов на вопросы по алгебре и геометрии и 74% – по геометрии и химии. Каков у Васи процент верных ответов за все тесты?

3. На горизонтальной прямой расставлено 2010 точек. Каждая из этих точек окрашена в красный или синий цвет. На каждой точке написана сумма количества синих точек слева от нее и красных точек справа. Оказалось, что все написанные числа четны. Сколько могло быть точек красного цвета?

4. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина стороны AB, точка N на стороне CD такова, что BN – биссектриса угла B. Оказалось, что $CM \perp BN$. Докажите, что AN – биссектриса угла A.

5. Найдите наибольшее значение величины $\sin(\cos x) + \cos(\sin x)$.

6. В треугольнике ABC точки O и G – центр описанной окружности и точка пересечения медиан соответственно. Оказалось, что $\angle OGA = 90°$. Прямая AG пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Прямые BP и CP пересекают прямые AC и AB в точках C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AB_1C_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC.

7. Можно ли все клетки таблицы 100×100 раскрасить в 100 цветов таким образом, чтобы в любой строке, любом столбце и любом квадрате 10×10 все клетки были разных цветов?

8. Решите уравнение $x^3 + y^3 + 1 = x^2y^2$ в натуральных числах.

Пятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010

Второй тур. Премьер-лига. 23 сентября 2010 г.

1. Взаимно простые числа a и b таковы, что число $\frac{a+b}{a-b}$ – целое. Докажите, что либо число $ab+1$, либо число $4ab+1$ – квадрат целого числа.

2. Вася сдавал тесты по алгебре, геометрии и химии. Каждый тест состоял из нескольких вопросов, по разным дисциплинам могло быть разное количество вопросов. Оказалось, что по алгебре он дал 50% верных ответов, по геометрии – 70%, по химии – 80%. Известно также, что он дал 62% верных ответов на вопросы по алгебре и геометрии и 74% – по геометрии и химии. Каков у Васи процент верных ответов за все тесты?

3. На горизонтальной прямой расставлено 2010 точек. Каждая из этих точек окрашена в красный или синий цвет. На каждой точке написана сумма количества синих точек слева от нее и красных точек справа. Оказалось, что все написанные числа четны. Сколько могло быть точек красного цвета?

4. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина стороны AB, точка N на стороне CD такова, что BN – биссектриса угла B. Оказалось, что $CM \perp BN$. Докажите, что AN – биссектриса угла A.

5. Найдите наибольшее значение величины $\sin(\cos x) + \cos(\sin x)$.

6. В треугольнике ABC точки O и G – центр описанной окружности и точка пересечения медиан соответственно. Оказалось, что $\angle OGA = 90°$. Прямая AG пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Прямые BP и CP пересекают прямые AC и AB в точках C_1 и B_1 соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AB_1C_1 лежит на описанной окружности треугольника ABC.

7. Можно ли все клетки таблицы 100×100 раскрасить в 100 цветов таким образом, чтобы в любой строке, любом столбце и любом квадрате 10×10 все клетки были разных цветов?

8. Решите уравнение $x^3 + y^3 + 1 = x^2y^2$ в натуральных числах.