Пятый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 21-28.09.2010

2 тур

Старт лига

1. Можно ли провести из одной точки плоскости шесть лучей так, чтобы среди образованных ими углов было ровно четыре острых? Рассматриваются углы не только между соседними, но и между любыми двумя лучами.

2. Взаимно простые числа a и b таковы, что число $\frac{a+b}{a-b}$ – целое. Докажите, что либо число $ab+1$, либо $4ab+1$ – квадрат целого числа.

3. Двое играют в такую игру. Первый называет одно из двух чисел: 2 или 3, второй умножает это число на 2 или 3; затем первый умножает результат на 2 или 3 и т.д. Выигрывает тот, кто первым получит результат больше 2010. Кто может выиграть независимо от игры соперника?

4. В чемпионате по рыбной ловле участвовало несколько рыбаков. Известно, что победитель (поймавший наибольшее число рыб) поймал ровно в 4 раза меньше рыб, чем все остальные участники вместе взятые. Рыбак, занявший третье место, поймал ровно в 9 раз меньше, чем все остальные, а рыбак, оказавшийся на последнем месте, поймал ровно в 10 раз меньше, чем все остальные. Сколько рыбаков участвовало в соревновании?

5. Компьютер ставит в каждую клетку таблицы 10×10 натуральное число, не большее 5. Верблюд хочет найти несколько клеток так, чтобы сумма чисел в этих клетках равнялась X. При каком наименьшем X, ему удастся это сделать вне зависимости от чисел, поставленных компьютером.

6. Между любыми двумя городами в государстве можно проехать по нечётному количеству дорог. Докажите, что между любыми несмежными городами можно проехать по чётному числу дорог.

7. На горизонтальной прямой расставлено 2010 точек. Каждая из этих точек окрашена в красный или синий цвет. На каждой точке написана сумма количества синих точек слева от нее и красных точек справа. Оказалось, что все написанные числа четны. Сколько могло быть точек красного цвета?

8.Можно ли все клетки таблицы 100x100 раскрасить в 100 цветов таким образом, чтобы в любой строке, любом столбце и любом квадрате 10x10 в этой таблице все клетки были разных цветов?