Пятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010

Третий тур. Гранд-лига. 25 сентября 2010 г.

1. В стране n городов A_1, A_2, …, A_n, некоторые пары городов соединены двусторонними авиалиниями. Известно, что город A_i соединен с d_i городами, где $1 \leqslant d_i \leqslant 2010$ для $i = 1, 2, \ldots, 2010$, а общее количество авиалиний в стране равно m. Докажите, что $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_{2010}^2 \leqslant 4022m - 2010n$.

2. Действительные числа a, b, c, d удовлетворяют равенствам $abc - d = 1$, $bcd - a = 2$, $cda - b = 3$, $dab - c = -6$. Докажите, что $a + b + c + d \neq 0$.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. На прямой B_1C_1 выбрана точка K так, что $\angle KBA = 90°$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1BK лежит на прямой AC.

4. Все натуральные числа, кроме конечного количества, окрашены в синий цвет. Докажите, что существует бесконечное множество бесконечных арифметических прогрессий, состоящих из синих чисел, таких, что каждое синее число принадлежит ровно одной прогрессии из этого множества.

5. Пусть m и n – пара нечетных взаимно простых чисел. Положим $m = 2a + 1$, $n = 2b + 1$. Найдите НОД$(2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1, 2^{2b+1} + 2^{b+1} + 1)$.

6. В параллелограмме $ABCD$ точка E – середина отрезка AB, а F – середина отрезка BC. Отрезки EC и FD пересекаются в точке P. Найдите площади треугольников BCP, CDP и DAP, если площадь треугольника ABP равна 1.

7. Двадцать пять "орлят" попарно различного роста нужно выстроить в прямоугольник 5×5 так, чтобы в каждой колонне люди стояли в порядке убывания роста. Сколькими способами это можно сделать?

8. Найдите все пары простых чисел p, q таких, что при некотором натуральном k выполнено равенство $2p^k + 1 = q^5$.

9. Граница бассейна (не обязательно выпуклого) – замкнутая несамопересекающаяся ломаная $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ длины ℓ метров. Вася начал плавание в бассейне из точки A_1, в процессе плавания побывал (в некотором порядке) во всех точках A_2, …, A_n, и закончил плавание в A_1. Докажите, что Вася проплыл не меньше ℓ метров.

10. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $abcd = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right)\left(d + \frac{1}{d}\right)} + 2 \geqslant ab + bc + cd + da + ac + bd.$$

Пятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010

Третий тур. Гранд-лига. 25 сентября 2010 г.

1. В стране n городов A_1, A_2, …, A_n, некоторые пары городов соединены двусторонними авиалиниями. Известно, что город A_i соединен с d_i городами, где $1 \leqslant d_i \leqslant 2010$ для $i = 1, 2, \ldots, 2010$, а общее количество авиалиний в стране равно m. Докажите, что $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_{2010}^2 \leqslant 4022m - 2010n$.

2. Действительные числа a, b, c, d удовлетворяют равенствам $abc - d = 1$, $bcd - a = 2$, $cda - b = 3$, $dab - c = -6$. Докажите, что $a + b + c + d \neq 0$.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. На прямой B_1C_1 выбрана точка K так, что $\angle KBA = 90°$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1BK лежит на прямой AC.

4. Все натуральные числа, кроме конечного количества, окрашены в синий цвет. Докажите, что существует бесконечное множество бесконечных арифметических прогрессий, состоящих из синих чисел, таких, что каждое синее число принадлежит ровно одной прогрессии из этого множества.

5. Пусть m и n – пара нечетных взаимно простых чисел. Положим $m = 2a + 1$, $n = 2b + 1$. Найдите НОД$(2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1, 2^{2b+1} + 2^{b+1} + 1)$.

6. В параллелограмме $ABCD$ точка E – середина отрезка AB, а F – середина отрезка BC. Отрезки EC и FD пересекаются в точке P. Найдите площади треугольников BCP, CDP и DAP, если площадь треугольника ABP равна 1.

7. Двадцать пять "орлят" попарно различного роста нужно выстроить в прямоугольник 5×5 так, чтобы в каждой колонне люди стояли в порядке убывания роста. Сколькими способами это можно сделать?

8. Найдите все пары простых чисел p, q таких, что при некотором натуральном k выполнено равенство $2p^k + 1 = q^5$.

9. Граница бассейна (не обязательно выпуклого) – замкнутая несамопересекающаяся ломаная $A_1A_2 \ldots A_nA_1$ длины ℓ метров. Вася начал плавание в бассейне из точки A_1, в процессе плавания побывал (в некотором порядке) во всех точках A_2, …, A_n, и закончил плавание в A_1. Докажите, что Вася проплыл не меньше ℓ метров.

10. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $abcd = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right)\left(d + \frac{1}{d}\right)} + 2 \geqslant ab + bc + cd + da + ac + bd.$$