Пятый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010

Четвертый тур. Гранд-лига (полуфинал). 26 сентября 2010 г.

1. На плоскости расположено несколько точек красного, синего и зеленого цветов. Оказалось, что сумма расстояний между красными и синими точками равно 100, между красными и зелеными — 111, а между синими и зелеными — 1. Докажите, что точек одного из цветов не менее 10.

2. В треугольнике ABC точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр, точка A' симметрична A относительно BC. Пусть OA' и BC пересекаются в точке T. Докажите, что прямая AT делит отрезок OH пополам.

3. Четное натуральное число a и натуральное число $n \geqslant 2$ таковы, что число $\dfrac{a^n-1}{a-1}$ — квадрат натурального числа. Докажите, что число $a+5$ не может быть точным квадратом.

4. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что при $n \geqslant 2$ выполнено $a_{n+1} = \dfrac{\text{НОК}(a_{n-1}, a_n)}{\text{НОД}(a_{n-1}, a_n)}$. Докажите, что найдется номер N, такой что последовательность при $n \geqslant N$ выполнено $a_{n+3} = a_n$.

5. Дана окружность ω, прямая ℓ, не пересекающая окружность ω, и точки A_1, A_2 и A_3 на прямой ℓ. В окружность вписываются четырехугольники $X_1X_2X_3X_4$ такие, что прямая X_1X_2 проходит через A_1, прямая X_2X_3 проходит через A_2, прямая X_3X_4 проходит через A_3. Докажите, что прямые X_4X_1 проходят через фиксированную точку или параллельны.

6. Точки L, M и N на стороне BC треугольника ABC таковы, что $\angle BAL = \angle CAL$, $\angle BAM = \angle CAN$. Докажите, что $\dfrac{BM}{CM} + \dfrac{BN}{CN} \geqslant 2 \cdot \dfrac{BL}{CL}$.

7. Найдите все наборы чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ такие, что $|a_1 - a_2| = 2|a_2 - a_3| = 3|a_3 - a_4| = \ldots = 2010|a_{2010} - a_1|$.

8. Найдите все натуральные n, такие что число $a^{n!} + a^{(n-1)!} + \ldots + a^{1!} + 1$ делится на число $a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1$ для бесконечного множества натуральных чисел a.

9. В интернете имеется $n = 2^{2^k}$ (k — натуральное) страниц, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. Изначально для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ на странице i имеется ссылка на страницу $i+1$. Разрешается на странице поставить ссылку на страницу, номер которой больше ее номера. Докажите, что можно поставить не больше $3kn$ новых ссылок (всего на всех страницах) так, чтобы с любой страницы можно было перейти на страницу, номер которой больше ее номера, не более, чем за 3 перехода по ссылкам.

10. Дан белый квадрат 8×8. За один ход можно покрасить в черный цвет все единичные квадратики некоторого квадрата 2×2, в котором есть хотя бы три белые клетки (в процессе перекрашивания некоторые черные клетки могут быть покрашены больше одного раза). Какое максимальное количество ходов можно сделать?