Пятый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010

Четвертый тур. Гранд-лига (за 5-8 место). 26 сентября 2010 г.

1. На плоскости расположено несколько точек красного, синего и зеленого цветов. Оказалось, что сумма расстояний между красными и синими точками равно 100, между красными и зелеными — 111, а между синими и зелеными — 1. Докажите, что точек одного из цветов не менее 10.

2. На плоскости расположен выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка O. Точки K, L, M, N — центры описанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD, ODA соответственно. Докажите, что существует единственная такая точка O, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

3. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что при $n \geqslant 2$ выполнено $a_{n+1} = \dfrac{\text{НОК}(a_{n-1}, a_n)}{\text{НОД}(a_{n-1}, a_n)}$. Докажите, что найдется номер N, такой что последовательность при $n \geqslant N$ выполнено $a_{n+3} = a_n$.

4. Дана последовательность натуральных чисел $a_n = 2^n(n+1)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Какое наибольшее количество подряд идущих членов этой последовательности могут быть точными квадратами?

5. В треугольнике ABC точки O и H — центр описанной окружности и ортоцентр, точка A' симметрична A относительно BC. Пусть OA' и BC пересекаются в точке T. Докажите, что прямая AT делит отрезок OH пополам.

6. Точки L, M и N на стороне BC треугольника ABC таковы, что $\angle BAL = \angle CAL$, $\angle BAM = \angle CAN$. Докажите, что $\dfrac{BM}{CM} + \dfrac{BN}{CN} \geqslant 2 \cdot \dfrac{BL}{CL}$.

7. Найдите все наборы чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ такие, что $|a_1 - a_2| = 2|a_2 - a_3| = 3|a_3 - a_4| = \ldots = 2010|a_{2010} - a_1|$.

8. В ряд стоят 1000 различных натуральных чисел, причем каждое число, кроме крайних, равно среднему гармоническому соседей. Докажите, что все эти числа больше, чем 998. (Напомним, что средним гармоническим чисел a и b называется число $\frac{2}{1/a+1/b}$).

9. В городе Нечётске 100 девочек $A_1, \ldots, A_{100}$ и 199 мальчиков $B_1, \ldots, B_{199}$. Для каждого натурального $k \leqslant 100$ девочка A_k знакома с мальчиками B_1, $B_2, \ldots, B_{2k-1}$ и ни с какими другими. Сколькими способами можно составить 100 танцевальных пар, если девочки соглашаются танцевать только со знакомыми мальчиками?

10. Дан белый квадрат 9×9. За один ход можно покрасить в черный цвет все единичные квадратики некоторого квадрата 2×2, в котором есть хотя бы две белые клетки (в процессе перекрашивания некоторые черные клетки могут быть покрашены больше одного раза). Какое максимальное количество ходов можно сделать?