

# Пятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 20-28.09.2010

Четвёртый тур. Премьер-лига. 26 сентября 2010 г.

1. На плоскости расположен выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  и точка  $O$ . Точки  $K, L, M, N$  – центры описанных окружностей треугольников  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$ ,  $ODA$  соответственно. Докажите, что существует единственная такая точка  $O$ , что четырёхугольник  $KLMN$  – параллелограмм.

2. Дана последовательность натуральных чисел  $a_n = 2^n(n + 1)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Какое наибольшее количество подряд идущих членов этой последовательности могут быть точными квадратами?

3. Чётное натуральное  $a$  и натуральное  $n > 1$  таковы, что число  $\frac{a^n - 1}{a - 1}$  – квадрат натурального числа. Докажите, что число  $a + 5$  не может быть точным квадратом.

4. Дан белый квадрат  $30 \times 30$ . За один ход можно перекрасить в чёрный цвет все клетки некоторого квадрата  $2 \times 2$ , в котором есть хотя бы одна белая клетка. Какое максимальное количество ходов можно сделать?

5. В треугольнике  $ABC$  вписанная окружность касается сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  соответственно. На стороне  $BC$  выбрана точка  $S$  таким образом, что  $AB = BS$ . Докажите, что отрезок  $AS$  делится прямой  $KL$  пополам.

6. В городе Нечётске 100 девочек  $A_1, \dots, A_{100}$  и 199 мальчиков  $B_1, \dots, B_{199}$ . Для каждого натурального  $k \leq 100$  девочка  $A_k$  знакома с мальчиками  $B_1, B_2, \dots, B_{2k-1}$  и ни с какими другими. Сколькими способами можно составить 100 танцевальных пар, если девочки соглашаются танцевать только со знакомыми мальчиками?

7. В ряд стоят 1000 различных натуральных чисел, причем каждое число, кроме крайних, равно среднему гармоническому соседей. Докажите, что все эти числа больше, чем 998. (Напомним, что средним гармоническим чисел  $a$  и  $b$  называется число  $\frac{2}{1/a + 1/b}$ ).

8. На плоскости расположено несколько точек красного, синего и зелёного цветов. Оказалось, что сумма расстояний между красными и синими точками равна 100, между красными и зелёными – 111, а между синими и зелёными – 1. Докажите, что точек хотя бы одного из цветов не менее 10.