Пятый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 21-28.09.2010

полуфинал

Старт лига

1. Фонтан в «Орлёнке» имеет n видов трубок и работает по программе, которая начинает работу, когда все трубки выключены и заканчивает работу, как только все трубки выключаются. Каждую секунду один какой-то вид трубок либо включается, либо выключается. Могут ли во время работы программы встретиться все возможные комбинации работающих трубок, причём, по одному разу?
2. На столе 5×5 лежат несколько салфеток 2×2. Назовём толщиной покрытия клетки – количество салфеток, покрывающих её. Рассмотрим отношение толщины покрытия самой «укрытой» клетки к самой «неукрытой». Найдите наименьшее возможное значение этого отношения.
3. Мальвина велела Буратино вычислить значение выражение $a^2 \times b^2 \times c^2 \times d^2$ для каких-то целых значений a, b, c и d. Буратино забыл, что означает знак × и заменил все такие знаки либо плюсами, либо минусами. В результате у него получилось 2010. Докажите, что значение исходного выражения делится на 144.
4. В ряд стоят 1000 различных натуральных чисел, причем каждое число, кроме крайних, равно среднему гармоническому соседей. Докажите, что все эти числа больше, чем 998. (Напомним, что средним гармоническим чисел a и b называется число $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$).
5. На доске написано n "равенств" вида $* \times * = *$. Два игрока – одногорбый и двугорбый верблюды – по очереди вставляют вместо звездочек произвольные числа. При этом одногорбый стремится, чтобы как можно больше равенств были верными, а двугорбый – чтобы как можно больше были неверными. Какое наибольшее число верных равенств может обеспечить одногорбый (как бы ни играл двугорбый)?
6. Какое наибольшее количество острых углов могут идти подряд в девятиугольнике?
7. В городе Нечетске 100 девочек $A_1, \ldots, A_{100}$ и 199 мальчиков $B_1, \ldots, B_{199}$. Для каждого натурального $k \le 100$ девочка A_k знакома с мальчиками $B_1, B_2, \ldots, B_{2k-1}$ и ни с какими другими. Сколькими способами можно составить 100 танцевальных пар, если девочки соглашаются танцевать только со знакомыми мальчиками?
8. Дана последовательность натуральных чисел $a_n=(n+1)2^n$ (n=1,2,3,…). Какое наибольшее количество подряд идущих членов этой последовательности могут быть точными квадратами?