

# Пятый Южный математический турнир

ВДЦ «Орлёнок», 21-28.09.2010

4 тур

## Старт лига

1. Фонтан в «Орлёнке» имеет 5 видов трубок и работает по программе, которая начинает работу, когда все трубки выключены и заканчивает работу, как только все трубки выключаются. Каждую секунду один какой-то вид трубок либо включается, либо выключается. Могут ли во время работы программы встретиться все возможные комбинации работающих трубок, причём, по одному разу?
2. На столе  $5 \times 7$  лежат несколько салфеток  $2 \times 2$ . Назовём толщиной покрытия клетки – количество салфеток, покрывающих её. Рассмотрим отношение толщины покрытия самой «укрытой» клетки к самой «неукрытой». Докажите, что значение этого отношения не меньше двух.
3. Мальвина велела Буратино вычислить значение выражение  $a^2 \times b^2 \times c^2 \times d^2$  для каких-то целых значений  $a, b, c$  и  $d$ . Буратино забыл, что означает знак  $\times$  и заменил все такие знаки либо плюсами, либо минусами. В результате у него получилось 2010. Докажите, что значение исходного выражения делится на 144.
4. На двух досках записаны два числа по одному на каждой доске. Разрешается составить любое арифметическое выражение содержащие эти два числа, вычислить его результат и записать получившееся число вместо одного из чисел. Можно ли за несколько таких операций поменять числа местами?
5. На доске написаны 2010 единиц. Двое по очереди стирают любые два числа и записывают вместо них их сумму или произведение. Первый стремится к тому, чтобы последнее число было как можно меньше, а второй — к тому, чтобы оно было как можно больше. Какое число останется?
6. Какое наибольшее количество острых углов могут идти подряд в шестиугольнике?
7. Существуют ли четыре числа, являющиеся точными квадратами, в записи которых (во всех вместе) встречаются все цифры от 1 до 9 по одному разу?
8. В городе Нечетске 10 девочек  $A_1, \dots, A_{10}$  и 19 мальчиков  $B_1, \dots, B_{19}$ . Для каждого натурального  $k \leq 10$  девочка  $A_k$  знакома с мальчиками  $B_1, B_2, \dots, B_{2k-1}$  и ни с какими другими. Сколькими способами можно составить 10 танцевальных пар, если девочки соглашаются танцевать только со знакомыми мальчиками?