Пятый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 20-28.09.2010
Финал. Гранд-лига. 27 сентября 2010 г.

1. На окружности радиуса 1 выбираются n точек. Найдите наибольшее возможное значение произведения всех попарных расстояний между ними.

2. На прямоугольном столе разложено несколько прямоугольников со сторонами, параллельными краям стола. Каждый прямоугольник раскрашен в один из трех цветов. Известно, что любые два прямоугольника разных цветов пересекаются. Докажите, что найдется цвет такой, что все прямоугольники этого цвета можно прибить к столу одним гвоздем.

3. В неравнобедренном треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA, AB соответственно в точках A_1, B_1, C_1, H_1 — ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$. Прямая IH_1 пересекается с прямой BC в точке D. Докажите, что точка, симметричная A_1 относительно прямой B_1C_1, лежит на прямой AD.

4. Для натурального числа n через $d(n)$ и $s(n)$ обозначим соответственно число натуральных делителей и сумму натуральных делителей числа n. Найдите наибольшее возможное значение a такое, что для всех натуральных $n \geqslant 2$ выполнено неравенство $\dfrac{s(n)}{d(n)} \geqslant a\sqrt{n}$.

5. Для попарно различных положительных чисел a, b, c докажите неравенство
$$\frac{(b-c)^4}{(a-b)^2(a-c)^2} + \frac{(c-a)^4}{(b-c)^2(b-a)^2} + \frac{(a-b)^4}{(c-a)^2(c-b)^2} \geqslant \frac{33}{2}.$$

6. В каждую клетку таблицы $m \times n$ записывается целое неотрицательное число так, что сумма чисел в любой строке не превосходит 10^6. За одну операцию можно выбрать несколько клеток, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце, и одновременно уменьшить на 1 все числа в выбранных клетках. Найдите наименьшее N такое, что из любой начальной ситуации можно получить таблицу, заполненную нулями, не более чем за N операций.

7. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \dfrac{3a_n^2 + 1}{2} - a_n$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что для любого натурального k число a_{3^k} является натуральным и делится на 3^k.

8. Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке S, и касаются окружности ω внутренним образом в точках P и Q соответственно. Общая касательная к ω_1 и ω_2, проходящая через точку S, пересекает ω в двух точках, одна из которых обозначена R. Прямая RP пересекает ω_1 вторично в точке A, а прямая RQ пересекает ω_2 вторично в точке B. Прямая PQ пересекает ω_1 и ω_2 вторично в точках C и D соответственно. Докажите, что прямые AC, BD и RS пересекаются в одной точке.

9. В квадратной таблице 100×100 записаны числа от 1 до 10000 в некотором порядке. Оказалось, что в любом подквадрате этой таблицы сумма чисел в двух угловых клетках одной диагонали равна сумме чисел в двух угловых клетках другой диагонали. Чему может равняться сумма 100 чисел, стоящих на одной диагонали такой таблицы?

10. Дано натуральное число m. Докажите, что уравнение $\dfrac{x}{m} = \left[\sqrt[3]{x^2}\right] + [\sqrt{x}] + 1$ имеет хотя бы одно натуральное решение.