

Пятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 21-28.09.2010

Командная олимпиада. 21 сентября 2010 г.

Старшие лиги

Довывод

1. Вещественные числа x и y удовлетворяют условию $\frac{x+22}{y} + \frac{290}{xy} = \frac{26-y}{x}$. Найдите xy .
2. В вершинах правильного n -угольника расставлены числа от 1 до n так, что расстояние между двумя последовательными натуральными числами всегда одно и то же. Числа 11, 4 и 17 стоят подряд. Чему может быть равно n ?
3. Точки K и L – основания биссектрис AL и BK разностороннего треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к BK пересекает прямую AL в точке M . Точка N на прямой BK такова, что LN параллельно MK . Докажите, что $LN = NA$.
4. Для каждой перестановки (x_1, x_2, \dots, x_9) чисел от 1 до 9 рассмотрим выражение $x_1 + 2x_2 + \dots + 9x_9$. Сколько разных значений оно может принимать?
5. На доске выписаны все натуральные делители натурального числа N . Два игрока A и B по очереди делают ходы в следующей игре. Первым ходом игрок A стирает число N . Если последнее стёртое число – d , то следующий игрок должен стереть делитель d или кратное d . Проигрывает не имеющий хода. Найдите все N , при которых A может обеспечить себе победу.

Вывод

6. Найдите все простые p , для которых существуют натуральные m и n такие, что $p = m^2 + n^2$ и $m^3 + n^3 - 4$ делится на p .
7. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC , CA и AB в точках D , E и F соответственно. Точка K симметрична точке D относительно центра вписанной окружности. Прямые DE и FK пересекаются в точке S . Докажите, что прямые AS и BC параллельны.
8. Во дворе поставили несколько некрашенных столбов, никакие два из которых не соединены проводом. В каждый из k дней электрик Петрович либо соединяет проводами один столб с любыми другими по своему выбору, либо вешает не более 17 проводов, выбирая соединяемые пары столбов произвольным образом. Маляр Палыч хочет раскрасить столбы не более чем в 2009 цветов так, чтобы провода не соединяли столбы одного цвета. При каком наибольшем k Палыч может быть уверен, что у него все получится?