Пятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 20-28.09.2010

Финал. Премьер-лига. 27 сентября 2010 г.

1. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки K и N таким образом, что $AK + BC = CN + AB$. Точка M – середина отрезка KN. Докажите, что если BM – биссектриса треугольника ABC, то $AB = BC$.

2. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Обозначим через I_1 и I_2 центры вписанных окружностей треугольников ABC и ABD соответственно. Прямая I_1I_2 пересекает стороны BC и AD в точках E и F. Докажите, что существует окружность, касающаяся сторон BC и AD именно в точках E и F.

3. Существует ли кубический многочлен с целыми коэффициентами и единичным старшим коэффициентом, все значения которого в натуральных точках – нечетные положительные составные числа?

4. Для попарно различных положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{(b-c)^4}{(a-b)^2(a-c)^2} + \frac{(c-a)^4}{(b-c)^2(b-a)^2} + \frac{(a-b)^4}{(c-a)^2(c-b)^2} \geqslant 16.$$

5. В квадратной таблице 100×100 записаны числа от 1 до 10000 в некотором порядке. Для любых четырех клеток, стоящих в вершинах квадрата со сторонами, параллельными сторонам таблицы, суммы чисел, стоящих в концах двух диагоналей квадрата, равны. Чему может равняться сумма всех чисел на диагонали этой таблицы?

6. По окружности расставлено 300 точек. Некоторые пары этих точек соединены отрезками, причем среди любых четырёх точек есть две, не соединенные отрезком. Каково наибольшее возможное количество треугольников с вершинами в этих точках и сторонами, идущими по проведенным отрезкам?

7. Докажите, что для любого натурального числа $n \geqslant 3$ существуют натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что $a_1a_2\ldots a_n + a_i$ делится на a_i^2 для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

8. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана следующим образом: $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \frac{5a_n^2 - 2a_n + 1}{4}$ при $n \geqslant 1$. Докажите, что для любого натурального k число a_k является натуральным.