Пятый Южный математический турнир

ВДЙ «Орлёнок», 20-28.09.2010

Финал. Старт-лига. 27 сентября 2010 года.

1. Придумайте минимальный по количеству деталей конструктор, из которого можно сложить любой параллелепипед со сторонами, не превышающими 3. Каждая деталь должна быть связной и состоять из единичных кубиков.

2. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы A и C – прямые. AB = AD. Диагональ AC равна 1. Найдите площадь четырёхугольника.

3. Двое по очереди вычитают из написанного на доске числа любые две из его цифр (например, из числа 1031 можно получить числа: 1030, 1029, 1028 или 1027). В начале на доске написано число 9999. Выигрывает тот, кто получит однозначное число. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

4. На плоскости лежат несколько П-пентамино. Докажите, что какую-то из фигурок можно сдвинуть.

5. Существуют ли натуральные числа a,b,c такие, что выражение n^3+an^2+bn+c при всех натуральных n является нечетным составным числом?

6. Даны три положительных числа x_1,x_2,x_3 сумма которых равна 4. Докажите, что $\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}+\sqrt{1+x_3^2}\geq 5$.

7. Правильный $4n$-угольник разрезан на несколько параллелограммов Докажите, что среди них, по крайней мере, n прямоугольников.

8. В классе некоторые школьники дружат друг с другом. Известно, что все, у кого есть хотя бы один друг, могут обменяться записками, последовательно передаваемыми только между друзьями. Докажите, что кто-то может поссориться с двумя своими друзьями, а указанное свойство не нарушится.