

**1 (ст).** Назовём набор из ста натуральных чисел *красивым*, если сумма чисел набора равна их НОКу. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел *красивого* набора?

**2 (ст).** Наименьший из углов прямоугольного треугольника равен  $\alpha$ . Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найдите отношение площадей круга и треугольника.

**3 (ст).** Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы все клетки доски оказались под боем этих ладей? (Занятая ладьёй клетка считается побитой.)

**4 (ст).** Про действительные числа  $a$  и  $b$  известно, что  $0 < ab \leq 4$  и  $a + b + 2 = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$ . Чему может быть равна сумма  $a+b$ ?

**5 (ст).** Точка  $H$  – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку  $H$  проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке  $M$ . Найдите  $HM$ .

**6 (ст).** Сумма положительных чисел  $a$  и  $b$  равна 1. Найдите все значения, которые может принимать выражение  $k - [ka] - [kb]$  при всевозможных натуральных  $k$  в зависимости от параметра  $a$ , где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ .

**7 (ст).** Сколько существует троек натуральных чисел, не превосходящих 100, таких, что сумма их квадратов делится на 7? (Порядок чисел в тройке не важен. Ответ дать числом в десятичной записи.)

**8 (ст).** На координатной плоскости ( $Oxy$ ) даны точки  $A(0;0)$ ,  $B(3;3)$ ,  $C(8;3)$  и  $D(5;0)$ . Напишите уравнение какой-нибудь прямой, которая проходит через точку пересечения диагоналей четырёхугольника  $ABCD$  и разбивает его на две части, из которых можно сложить ромб.

**9 (ст).** Решите уравнение

$$[x] + [2x] + [4x] + [8x] = 2011,$$

где  $[a]$  – целая часть числа  $a$ .

**11 (ст).** Про  $n$  натуральных чисел известно, что ровно в 2011 парах из них одно из чисел делится на другое. При каком наибольшем  $n$  среди них обязательно найдутся такие три числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , что  $a$  делится на  $b$  и  $b$  делится на  $c$ ?

**13 (ст).** Решите уравнение

$$\sin^6 2x + \cos^6 2x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) / 2.$$

**15 (ст).** Найдите углы параллелограмма  $ABCD$ , в котором  $AB=BD$  и биссектрисы углов  $DAB$  и  $DBC$  пересекаются на стороне  $CD$ .

**10 (ст).** Внутри квадрата взяли 10 различных точек, после чего разрезали его на треугольники так, что вершинами треугольников являются только данные 14 точек (с учётом вершин квадрата) и каждая из этих 14 точек также является вершиной треугольников. Сколько могло получиться треугольников?

**12 (ст).**  $AK$  и  $BL$  – медианы треугольника  $ABC$ , в котором  $\angle BAK = \angle CBL = 30^\circ$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

**14 (ст).** Найдите все пары простых чисел  $p$  и  $q$ , для которых число  $(7^p - 2^p)(7^q - 2^q)$  делится на  $pq$ .

**16 (ст).** Даны 2011 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов может содержать объединение всех этих 2011 множеств?