

0–0. Сколько различных решений имеет уравнение $O \cdot P \cdot Л \cdot Ё \cdot Н \cdot О \cdot К = 2011$? (Разные буквы – разные числа, одинаковые буквы – одинаковые числа.)

0–1. В банкомат попал вирус, и он, действуя по некоторой программе, дал Васе 3 рубля, Коле - 12, Ярославу - 33. А сколько рублей он дал Юре?

0–2. Таракан Вася сказал, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Но на самом деле Вася перепутал единицы измерения, решив, что в метре – 60 сантиметров, а в минуте – 100 секунд. Какова его настоящая скорость? (Ответ дать в метрах в минуту.)

0–3. Приведите пример таких трёх подряд идущих трёхзначных чисел, что между цифрами каждого из них можно расставить некоторым образом знаки арифметических действий (+, –, ×, :) так, чтобы все три полученных числовых выражения оказались равными. (Запрещается ставить «–» перед первой цифрой и использовать скобки.)

0–4. Назовём натуральное число *замечательным*, если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Найдите 2011-ое по счёту *замечательное* число.

0–5. Нарисуйте пятиугольник с целочисленными сторонами, все вершины которого находятся в узлах клетчатой сетки со стороной 1.

0–6. Известно, что квадратный трехчлен $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 , а квадратный трехчлен $x^2 + x_1x + x_2 = 0$ имеет корни p и q . Укажите все четвёрки ненулевых чисел $\{p, q, x_1, x_2\}$ удовлетворяющих этому условию.

1–1. Решите уравнение:
$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2} = 2.$$

1–2. Полтора землекопа выкопали полторы ямы за полтора часа. Сколько ям выкопают два землекопа за два часа?

1–3. При каком наибольшем n на шахматной доске можно расставить несколько ферзей так, чтобы каждый бил не менее n других? Приведите ответ и пример.

1–4. В селе A – 100 детей, в селе B – 99. Расстояние между ними 10 км. На полпути между ними живёт Вася. Школа построена так, что сумма расстояний, проходимых всеми этими 200 детьми по дороге в школу наименьшая из возможных. Найдите наибольшее возможное значение расстояния от школы до A .

1–5. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) , состоящих из ненулевых цифр и таких, что $P(a):b$ и $P(b):a$, где $P(n)$ – произведение всех цифр числа n .

1–6. В стране 1000 аэродромов, все попарные расстояния между которыми различны. С каждого аэродрома взлетел один самолёт и совершил посадку на самом ближнем для него аэродроме. Какое наибольшее количество самолётов могло приземлиться на одном аэродроме?

2–2. Решите в натуральных числах уравнение $a = d(d(\dots(d(a))\dots))$, где $d(a)$ – количество делителей числа a , повторяется a раз.

2–3. В треугольнике две высоты равны 2 и 3, а площадь равна 1. Какие значения может принимать третья высота?

2–4. Найдите остаток от деления числа $2002^{2011} + 9^{2011} + 2^{22}$ на 2011.

2–5. Произведение пяти целых чисел не равно нулю. Каждое из них увеличили на единицу, но произведение не изменилось. Приведите пример таких пяти чисел.

2–6. Приведите пример невыпуклого многоугольника, площадь которого численно равна периметру.

3–3. В треугольнике две высоты не меньше сторон, к которым они проведены. Чему могут быть равны углы треугольника?

3–4. При каких целых n существуют ровно два таких целых m , что $3n^2 + 4m^2 = 8nm$?

3–5. Сколькими различными способами можно покрасить рёбра куба в 12 данных цветов так, чтобы в каждый цвет было покрашено ровно одно рёбро? (Способы считаются различными, если их нельзя совместить в пространстве так, чтобы рёбра каждого из цветов совпали.)

3–6. Многоугольник при повороте на 50° вокруг точки M перешёл сам в себя. Сколько у него может быть вершин?

4–4. Три пушки начинают стрелять одновременно. Интервалы между выстрелами для этих пушек составляют $4/3$ секунды, $5/3$ секунды и 2 секунды соответственно. Совпавшие во времени выстрелы воспринимаются за один. Сколько выстрелов будет услышано за 1 минуту? (Первый выстрел также считается.)

4–5. Приведите пример шестиугольника, никакие две диагонали которого не имеют общих точек (за исключением вершин).

4–6. На какое наибольшее количество частей могут делить плоскость 10 лучей? Приведите ответ и пример.

5–5. Найдите все пары двузначных чисел (a, b) , таких, что $2a^2 + 1 = b^2$.

5–6. В посёлке живёт 2011 человек. Каждый из них на Новый год обменялся поздравлениями не менее, чем с k другими жителями. При каком наименьшем k гарантированно найдутся три человека, попарно обменявшиеся поздравлениями?

6–6. Приведите пример 100 различных натуральных чисел, таких, что их сумма равна их наименьшему общему кратному. Покажите, почему требуемое условие выполняется.