

0–0. Сколько различных решений имеет уравнение $O \cdot P \cdot Л \cdot Ё \cdot Н \cdot О \cdot К = 2011$? (Разные буквы – разные числа, одинаковые буквы – одинаковые числа.)

0–1. Таракан Вася сказал, что умеет бегать со скоростью 50 м/мин. Но на самом деле Вася перепутал единицы измерения, решив, что в метре – 60 сантиметров, а в минуте – 100 секунд. Какова его настоящая скорость? (Ответ дать в метрах в минуту.)

0–2. Решите уравнение:

$$\frac{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}{x^2 + x - 2} = 2.$$

0–3. Приведите пример таких трёх подряд идущих трёхзначных чисел, что между цифрами каждого из них можно расставить некоторым образом знаки арифметических действий (+, –, ×, :) так, чтобы все три полученных числовых выражения оказались равными. (Запрещается ставить «–» перед первой цифрой и использовать скобки.)

0–4. Назовём натуральное число *замечательным*, если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Найдите 2011-ое по счёту *замечательное* число.

0–5. В треугольнике две высоты не меньше сторон, к которым они проведены. Чему могут быть равны углы треугольника?

0–6. Известно, что квадратный трехчлен $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 , а квадратный трехчлен $x^2 + x_1x + x_2 = 0$ имеет корни p и q . Укажите все четвёрки ненулевых чисел $\{p, q, x_1, x_2\}$ удовлетворяющих этому условию.

1–1. Полтора землекопа выкопали полторы ямы за полтора часа. Сколько ям выкопают два землекопа за два часа?

1–2. В селе A – 100 детей, в селе B – 99. Расстояние между ними 10 км. На полпути между ними живёт Вася. Школа построена так, что сумма расстояний, проходимых всеми этими 200 детьми по дороге в школу наименьшая из возможных. Найдите наибольшее возможное значение расстояния от школы до A .

1–3. При каком наибольшем n на шахматной доске можно расставить несколько ферзей так, чтобы каждый бил не менее n других? Приведите ответ и пример.

1–4. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) , состоящих из ненулевых цифр и таких, что $P(a):b$ и $P(b):a$, где $P(n)$ – произведение всех цифр числа n .

1–5. Произведение пяти целых чисел не равно нулю. Каждое из них увеличили на единицу, но произведение не изменилось. Приведите пример таких пяти чисел.

1–6. Многоугольник при повороте на 50° вокруг точки M перешёл сам в себя. Сколько у него может быть вершин?

2–2. Найдите остаток от деления числа $2002^{2011} + 9^{2011} + 2^{22}$ на 2011.

2–3. В треугольнике две высоты равны 2 и 3, а площадь равна 1. Какие значения может принимать третья высота?

2–4. Найдите все действительные числа x , целая часть которых является средним арифметическим самого числа и его дробной части. Целая часть числа $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x ; дробная часть числа $\{x\}$ – это разность самого числа x и его целой части.

2–5. Три пушки начинают стрелять одновременно. Интервалы между выстрелами для этих пушек составляют $4/3$ секунды, $5/3$ секунды и 2 секунды соответственно. Совпавшие во времени выстрелы воспринимаются за один. Сколько выстрелов будет услышано за 1 минуту? (Первый выстрел также считается.)

2–6. Приведите пример невыпуклого многоугольника, площадь которого численно равна периметру.

3–3. При каких целых n существуют ровно два таких целых m , что $3n^2 + 4m^2 = 8nm$?

3–4. Найдите все пары положительных чисел a и b таких, что уравнения $ax + b = 1$ и $\frac{x}{a} + \frac{1}{b} = 1$ имеют общий корень.

3–5. В классе 30 учеников. На каждом уроке физкультуры учитель делит класс на 2 команды, играющие друг против друга. Какое наименьшее количество уроков можно провести так, чтобы каждые два ученика хотя бы раз сыграли друг против друга?

3–6. Найдите все пары двузначных чисел (a, b) , таких, что $2a^2 + 1 = b^2$.

4–4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) продолжения биссектрис AK и CL касаются окружностей, симметричных вписанной окружности треугольника относительно сторон BC и AB соответственно. Найдите углы треугольника ABC .

4–5. Приведите пример 100 попарно различных натуральных чисел, таких, что их сумма равна их наименьшему общему кратному. Покажите, почему требуемое условие выполняется.

4–6. На какое наибольшее количество частей могут делить плоскость 10 лучей? Приведите ответ и пример.

5–5. В посёлке живёт 2011 человек. Каждый из них на Новый год обменялся поздравлениями не менее, чем с k другими жителями. При каком наименьшем k гарантированно найдутся три человека, попарно обменявшиеся поздравлениями?

5–6. Найдите наибольшее составное число n такое, что если $a_1 + a_2 + \dots + a_{1000} = n$ при некоторых натуральных $a_1, a_2, \dots, a_{1000}$, то эти 1000 чисел взаимно просты в совокупности.

6–6. Сколько различных решений у неравенства $O \cdot P \cdot L \cdot \dot{E} \cdot H \cdot O \cdot K \leq 2011$? (Разные буквы – разные цифры, одинаковые буквы – одинаковые цифры.)