

8. Имеются два одинаковых додекаэдра с 9 покрашенными вершинами. Докажите, что их можно совместить так, чтобы совпало не менее 5 покрашенных вершин.
9. Для семизначного числа  $a$  (допускается, что число начинается с 0) через  $n(a)$  обозначим количество шестизначных чисел, которые можно из него получить вычеркиванием одной из цифр. Найдите среднее значение  $n(a)$ .
10. На отрезке длиной 1 расположены попарно не пересекающиеся отрезки, сумма длин которых равна  $p$ . Обозначим эту систему отрезков  $A$ . Пусть  $B$  — дополнительная система отрезков. Докажите, что существует параллельный перенос  $T$ , для пересечения  $B \cap T(A)$  состоит из отрезков, сумма длин которых не меньше  $p(1 - p)/2$ .
11. У Клары есть комплект всевозможных бус из  $4n$  бусинок, где каждая бусинка либо черная, либо белая. Карл испортил один экземпляр, переставив в нем бусинки. Клара хочет перекрасить как можно меньше бусинок в испорченном экземпляре, чтобы снова получились прежние бусы. Какое наибольшее число бусинок ей может понадобиться перекрасить? (Бусы, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.)
12. Найдите среднее всех 7-значных чисел, состоящих а) из нечетных цифр; б) из ненулевых различных цифр
13. а) Найдите количество подмножеств множества  $S = \{1, 2, \dots, p - 1\}$ , где  $p$  — простое число, для которых сумма элементов кратна  $p$ . б) Аналогичный вопрос с заменой  $p$  на произвольное натуральное и множества  $S$  на множество чисел, меньших  $n$  и взаимно простых с  $n$ .

8. Имеются два одинаковых додекаэдра с 9 покрашенными вершинами. Докажите, что их можно совместить так, чтобы совпало не менее 5 покрашенных вершин.
9. Для семизначного числа  $a$  (допускается, что число начинается с 0) через  $n(a)$  обозначим количество шестизначных чисел, которые можно из него получить вычеркиванием одной из цифр. Найдите среднее значение  $n(a)$ .
10. На отрезке длиной 1 расположены попарно не пересекающиеся отрезки, сумма длин которых равна  $p$ . Обозначим эту систему отрезков  $A$ . Пусть  $B$  — дополнительная система отрезков. Докажите, что существует параллельный перенос  $T$ , для пересечения  $B \cap T(A)$  состоит из отрезков, сумма длин которых не меньше  $p(1 - p)/2$ .
11. У Клары есть комплект всевозможных бус из  $4n$  бусинок, где каждая бусинка либо черная, либо белая. Карл испортил один экземпляр, переставив в нем бусинки. Клара хочет перекрасить как можно меньше бусинок в испорченном экземпляре, чтобы снова получились прежние бусы. Какое наибольшее число бусинок ей может понадобиться перекрасить? (Бусы, отличающиеся поворотом или переворотом, считаются одинаковыми.)
12. Найдите среднее всех 7-значных чисел, состоящих а) из нечетных цифр; б) из ненулевых различных цифр
13. а) Найдите количество подмножеств множества  $S = \{1, 2, \dots, p - 1\}$ , где  $p$  — простое число, для которых сумма элементов кратна  $p$ . б) Аналогичный вопрос с заменой  $p$  на произвольное натуральное и множества  $S$  на множество чисел, меньших  $n$  и взаимно простых с  $n$ .