

## Бой за 5-е место.

1. В параллелограмме  $ABCD$  диагональ  $BD$  равна сторонам  $BC$  и  $AD$ . На стороне  $AD$  выбрана такая точка  $K$ , что  $AB = BK$ . Точка  $C_1$  симметрична  $C$  относительно  $K$ , а точка  $D_1$  симметрична  $D$  относительно  $A$ . Докажите, что  $BC_1 = BD_1$ .

2. Докажите, что для каждого натурального  $n$  найдется такое нечетное простое число  $p$ , что остаток от деления  $n$  на  $p$  равен  $\frac{p-1}{2}$ .

3. Расставьте на шахматной доске  $8 \times 8$  несколько коней так, чтобы каждый бил ровно 4 других.

4. Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что  $abc + 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c = 97$ . Чему может быть равно  $a + b + c$ ?

5. Семья рыбаков — отец и 3 сына — хочет переправить боевую группу из 10 бойцов на Тайный остров архипелага в тылу врага. Есть двухместная лодка. Не запомнив дороги, без проводника ее не проплыть. Вначале дорогу до Тайного острова знает только рыбак-отец. Но всех проводить он не сможет: путь лежит мимо Сторожевой башни, и каждый из них может пройти мимо нее не более 5 раз (иначе поднимется тревога). Остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу. Рыбак запоминает дорогу, если проплыл по ней один раз, а бойцу для этого надо проплыть туда и обратно. В конце все рыбаки должны быть дома, все бойцы — на острове, лодка — где придется. Как организовать переправу?

6. Пусть  $x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n$  — положительные вещественные числа. Докажите неравенство

$$x_0 + \frac{x_0}{(x_0 - x_1)^2} + \frac{x_1}{(x_1 - x_2)^2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{(x_{n-1} - x_n)^2} \geq \frac{x_1}{(x_1 - x_0)^2} + \dots + \frac{x_n}{(x_n - x_{n-1})^2} + x_n + 2n.$$

7. На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $E$  и  $F$  соответственно такие, что  $AE = AD$ ,  $BF = BD$ . Известно, что  $\angle EDF = 40^\circ$ . Найдите  $\angle ECF$ .

8. Для зарядки полностью разряженного телефона требуется 5 часов, а хватает заряженного телефона на 1 час разговоров. У Фомы два зарядных устройства. Каждый час в комнату вбегает Ерема и начинает звонить по одному из телефонов, пока тот полностью не разрядится. Сможет ли Фома полностью зарядить хотя бы один из пятидесяти разряженных телефонов, как бы не действовал Ерема?