

Неоднозначные данные, или Доказательство без разглашения

«А это вам знать пока рано», – сказала Баба-Яга своим 33 ученикам и скомандовала: «Закройте глаза!». Правый глаз закрыли все мальчики и треть девочек. Левый глаз закрыли все девочки и треть мальчиков. Сколько учеников всё-таки увидели то, что знать пока рано?

Неразличимые примеры

Чтобы доказать, что информации недостаточно для получения однозначного ответа, можно построить два примера, которые удовлетворяют всем условиям, но дают разные ответы.

1. а) Клетки доски 7×7 покрашены в красный, синий и черный цвета так, что в каждом прямоугольнике 1×3 встречаются все три цвета. Левая нижняя клетка – красная. Можно ли наверняка узнать цвет правой верхней клетки?

б) Тот же вопрос про доску 8×8 ?

2. У Кащей есть куб, в каждой вершине которого вставлено по алмазу. Известны веса этих алмазов: 1 карат, 2 карата, ..., 8 карат. Кащей предлагает Ивану Царевичу такую игру: он сообщает Ивану сумму весов алмазов на каждом ребре. Если после этого Иван правильно назовет, куда какой по весу алмаз вставлен, то получит этот куб вместе с алмазами, а если хотя бы в одном месте ошибется, то распрощается с головой. Стоит ли Ивану соглашаться играть?

3. а) Есть 4 яблока разных весов и чашечные весы без гирь. Можно ли найти яблоко, чей вес ближе всего к среднему весу всех яблок?

б) Есть 5 яблок разных весов и чашечные весы без гирь. Всегда ли можно найти яблоко, чей вес ближе всего к среднему весу всех яблок?

4. Все виды растений одной страны были занумерованы подряд натуральными числами от 2 до 20000 (числа идут без пропусков и повторений). Для каждой пары видов растений запомнили наибольший общий делитель их номеров, а сами номера были забыты (в результате сбоя компьютера). Можно ли для каждого вида растений восстановить его номер?

Примеры «задним числом»

Неразличимые примеры и контрпримеры могут строиться после того, как испытания уже проведены и ответы даны, с использованием уже полученной информации. Этот метод часто применяется, чтобы опровергнуть предположение о наличии «гарантированного» алгоритма.

5. На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка Р. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит Р (если Р лежит на прямой, то он говорит, что Р лежит на прямой). Нужно определить, лежит ли точка Р внутри квадрата. Можно ли это наверняка узнать

а) за два вопроса? б) за три вопроса?

6. Капитан Врунгель в своей каюте разложил перетасованную колоду из 52 карт по кругу, оставив одно место свободным. Матрос Фукс с палубы, не отходя от штурвала и не зная начальной раскладки, называет карту. Если эта карта лежит рядом со свободным местом, Врунгель ее туда передвигает, не сообщая Фуксу. Иначе ничего не происходит. Потом Фукс называет еще одну карту, и так сколько угодно раз, пока он не скажет «стоп». Может ли Фукс добиться, чтобы после «стопа»

а) каждая карта оказалась не на том месте, где была вначале?

б) рядом со свободным местом наверняка не было туза пик?

Доказательство без разглашения

Дополнительные знания помогают лучше понимать друг друга.

7. Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали, и раздали Грише и Леше по 3 карты, а оставшуюся карту спрятали. ;

а) Игроки могут по очереди сообщать вслух открытым текстом любую информацию о своих картах. Могут ли сообщить друг другу свои карты так, чтобы при этом зритель не смог вычислить местонахождение ни одной из карт?

б) Игроки задают друг другу любые вопросы типа «Да/Нет» о картах, первым спрашивает Гриша. При ответе «Да» следующий вопрос задает тот же игрок, при ответе «Нет» – его соперник. Как только игрок точно вычислит спрятанную карту, он заявляет об этом и выигрывает (при этом неважно, чья сейчас очередь задавать вопрос). Как Грише наверняка выиграть?

8. Суду предъявлен набор из 100 одинаковых с виду монет. Суд знает, что все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые – тоже одинаково, но легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Задача адвоката: показать суду, сколько есть фальшивых монет, не разгласив ни про какую монету, фальшивая она или настоящая. (Адвокат должен делать взвешивания на чашечных весах без гирь. Число взвешиваний не ограничено. Запрещены взвешивания и группы взвешиваний, из которых логически выводится, что конкретная монета фальшивая или настоящая.)

а) Суд уже установил, что фальшивых монет 3 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 4?

б) Суд уже установил, что фальшивых монет 0 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 4?

в) Суд уже установил, что фальшивых монет 2 или 3. Как адвокату показать, что их ровно 3?

Задачи для самостоятельного решения

НД1. В колоде 52 карты (4 масти, 13 достоинств). Про любую пару карт одной масти или одного достоинства известно, сколько карт между ними лежит. Всегда ли по этой информации можно узнать пару крайних карт колоды?

НД2. а) В клетки доски 8×8 записали числа $1, 2, \dots, 64$ в неизвестном порядке. Разрешается узнать сумму чисел в любой паре клеток с общей стороной. Всегда ли можно узнать расположение всех чисел? б) То же для доски 9×9 с числами от 1 до 81.

НД3. В условиях задачи 8:

г) Суд уже установил, что фальшивых монет 2, 3 или 4. Как адвокату показать, что их ровно 3?

д) Суду о числе фальшивых монет ничего не известно. Как адвокату показать, что их ровно 10?