

Тринадцатый Южный математический турнир

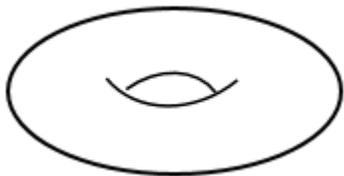
ВДЦ «Орлёнок», 19–26.09.2018

БОЙ №3. 22.09.2018. СТАРТ-ЛИГА

1. Назовём натуральное число *прогрессивным*, если оно представимо в виде суммы нечётного количества (больше одного) последовательных натуральных чисел, и *непрогрессивным*, если оно не представимо в таком виде. Докажите, что любое прогрессивное число представимо в виде суммы нескольких различных непрогрессивных чисел.

2. На стороне  $AD$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  взята точка  $K$ . Известно, что  $\angle BAD = \angle ADC$ ,  $\angle ABC = \angle DCK$ ,  $AB = 2CD$ . Докажите, что  $CK = BC$ .

3. Планета Тор имеет форму бублика. Можно ли на этой планете разместить 4 города, 4 космодрома и проложить дороги от каждого города к каждому космодрому, чтобы никакие две дороги не имели общих точек, кроме концов?



4. Дано простое число  $p$  и натуральные числа  $m$  и  $n$ . Известно, что каждое из чисел  $m^2 + 3$  и  $n^2 + 3$  делится на  $p$ . Какие остатки при делении на  $p$  может давать число  $mn$ ?

5. На острове рыцарей и лжецов некоторые жители знакомы между собой (знакомство взаимно). Рядом с путешественником стоят 10 аборигенов. Каждый абориген сказал про каждого из остальных 9 аборигенов одну из следующих фраз: «я его не знаю», «это мой знакомый рыцарь», «это мой знакомый лжец». Оказалось, что любые двое сказали друг про друга разные фразы. Про какое наибольшее число аборигенов путешественник сможет гарантированно узнать, кто они?

6. Клетки доски  $10 \times 10$  раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. *Слоновья тропа* – это последовательность различных клеток, в которой каждые две последовательные клетки имеют ровно одну общую точку (разрешается, чтобы тропа состояла и всего из одной клетки). На какое наименьшее количество слоновьих троп можно разбить все белые клетки?

7. Петя хочет переписать числа  $2, 3, 4, \dots, 2017, 2018$  в другом порядке так, чтобы первое выписанное число делилось на 1, второе – на 2, третье – на 3, и так далее (последнее число должно делиться на 2017). Сколькими способами он может это сделать?

8. Даны такие вещественные числа  $x, y$ , что числа  $x - y, x^2 - y^2, x^3 - y^3$  простые. Чему равно  $x - y$ ?