

Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Тур 3. 22.09.2018

Юниорская лига (9 класс).

1. Точка D симметрична вершине A остроугольного треугольника ABC относительно стороны BC . Окружность ω , описанная около треугольника ABC , пересекает отрезки DB и DC в точках X и Y соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $X Y D$, принадлежит ω .

2. Назовём натуральное число *простеньким*, если оно не делится ни на одну из своих ненулевых цифр. Найдите наибольшее возможное количество подряд идущих простеньких чисел.

3. Точка O — центр описанной окружности, а точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Точка F на стороне AB выбрана таким образом, что $OF \parallel BC$. Точка M — середина отрезка AH . Докажите, что $\angle FMC = 90^\circ$.

4. Даны вещественные числа x, y такие, что числа $x - y, x^2 - y^2, x^3 - y^3$ — простые. Докажите, что $x - y = 3$.

5. Клетки доски 100×100 раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. *Слоновья тропа* — это последовательность различных клеток, в которой каждые две последовательные клетки имеют ровно одну общую точку. На какое наименьшее количество слоновьих троп можно разбить все белые клетки?

6. Рассмотрим множество V строк длины n , состоящих из чисел $1, -1$ или 0 . Известно, что никакие три строки из V не дают нулевую строку при почленном сложении. Докажите, что в V входит не более $2 \cdot 3^{n-1}$ таких строк.

7. Пусть F_n — n -ое число Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$), и определим последовательность a_0, a_1, a_2, \dots следующим образом: положим $a_0 = 100$ и для всех $k \geq 0$ определим $a_{k+1} = a_k + F_n$, где F_n — наибольшее число Фибоначчи, меньшее чем a_k . Встретится ли в этой последовательности какое-нибудь число Фибоначчи?

8. На острове рыцарей и лжецов некоторые жители знакомы между собой (знакомство взаимно). Рядом с путешественником стоят 10 человек. Каждый сказал про всех остальных аборигенов одну из следующих фраз: “я его не знаю”, “это мой знакомый рыцарь”, “это мой знакомый лжец”. Оказалось, что любые двое сказали друг про друга разные фразы. Про какое наибольшее число человек путешественник сможет гарантированно узнать, кто они?

Тринадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018

Тур 3. 22.09.2018
Юниорская лига (9 класс).

1. Точка D симметрична вершине A остроугольного треугольника ABC относительно стороны BC . Окружность ω , описанная около треугольника ABC , пересекает отрезки DB и DC в точках X и Y соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника $X Y D$, принадлежит ω .

2. Назовём натуральное число *простеньким*, если оно не делится ни на одну из своих ненулевых цифр. Найдите наибольшее возможное количество подряд идущих простеньких чисел.

3. Точка O — центр описанной окружности, а точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Точка F на стороне AB выбрана таким образом, что $OF \parallel BC$. Точка M — середина отрезка AH . Докажите, что $\angle FMC = 90^\circ$.

4. Даны вещественные числа x, y такие, что числа $x - y, x^2 - y^2, x^3 - y^3$ — простые. Докажите, что $x - y = 3$.

5. Клетки доски 100×100 раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. *Слоновья тропа* — это последовательность различных клеток, в которой каждые две последовательные клетки имеют ровно одну общую точку. На какое наименьшее количество слоновьих троп можно разбить все белые клетки?

6. Рассмотрим множество V строк длины n , состоящих из чисел $1, -1$ или 0 . Известно, что никакие три строки из V не дают нулевую строку при почленном сложении. Докажите, что в V входит не более $2 \cdot 3^{n-1}$ таких строк.

7. Пусть F_n — n -ое число Фибоначчи ($F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$), и определим последовательность a_0, a_1, a_2, \dots следующим образом: положим $a_0 = 100$ и для всех $k \geq 0$ определим $a_{k+1} = a_k + F_n$, где F_n — наибольшее число Фибоначчи, меньшее чем a_k . Встретится ли в этой последовательности какое-нибудь число Фибоначчи?

8. На острове рыцарей и лжецов некоторые жители знакомы между собой (знакомство взаимно). Рядом с путешественником стоят 10 человек. Каждый сказал про всех остальных аборигенов одну из следующих фраз: “я его не знаю”, “это мой знакомый рыцарь”, “это мой знакомый лжец”. Оказалось, что любые двое сказали друг про друга разные фразы. Про какое наибольшее число человек путешественник сможет гарантированно узнать, кто они?