

**Тринадцатый Южный математический турнир  
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2018**

**БОЙ ЗА 5-6 МЕСТО. 24.09.18. СТАРТ-ЛИГА**

1. Точка  $D$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . Известно, что  $AB = AD = BC$ . Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку  $CD$  и биссектриса угла  $ADC$  пересекаются на прямой  $AC$ .
2. При каких  $n \geq 3$  любой выпуклый  $n$ -угольник можно разрезать на несколько выпуклых пятиугольников?
3. Для каждого натурального  $n$  клетчатый прямоугольник  $1 \times n$  разбивают на фигурки трёх типов: красные квадратики  $1 \times 1$ , зелёные квадратики  $1 \times 1$  и доминошки  $1 \times 2$ . (Например, при  $n = 2$  существует 5 способов разбить прямоугольник: красный–красный, красный–зелёный, зелёный–красный, зелёный–зелёный и доминошка.) Обозначим через  $t_n$  количество способов так разбить прямоугольник  $1 \times n$ . Докажите, что  $t_{2n+1}$  делится на  $t_n$  при каждом натуральном  $n$ .
4. На доске написаны два числа. Играют Саша и Катя. Начинает Саша. За один ход можно вычесть из меньшего числа 2 или вычесть из большего числа 3 (если перед ходом игрока числа равны, то он может из одного из чисел вычесть или 2, или 3). Выигрывает тот, кто первым получит отрицательное число. Кто выиграет, если вначале числа равны 201 и 301?
5. За круглым столом сидят  $n \geq 3$  девочек, у каждой из которых есть некоторое количество яблок. Каждый раз, когда учитель замечает девочку, у которой больше яблок, чем у обеих её соседок вместе взятых, он забирает у неё одно яблоко и выдаёт по яблоку каждой из её соседок. Докажите, что через конечное число шагов этот процесс закончится. (Предполагается, что у учителя неограниченный запас яблок.)
6. Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  — длины соответственно катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника. Известно, что  $a$ ,  $b$  и  $c$  — натуральные числа, причем  $b$  — простое число. Докажите, что  $2(b + c)$  — точный квадрат.
7. На доске записаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. За один шаг к любым пяти из этих чисел прибавляется по тройке, а из остальных вычитается по тройке. Могут ли через некоторое время на доске оказаться записанными в каком-то порядке числа:  $a, a, a, b, b, b, c, c, c, c$ ?
8. Неотрицательные числа  $x, y, z$  таковы, что  $2x + 3y = 18$  и  $2y + 3z = 18$ . Какие значения может принимать сумма  $2z + 3x$ ?