


Пятнадцатая Всероссийская смена «Юный математик»

Задания конкурсного отбора

Олимпиадная математика

9-10 класс

19 мая 2019 г.

1. Известно, что для некоторых углов x и y выполняются неравенства $\sin x > \cos y > 0$ и $\cos x > \sin y$. Докажите, что $\sin y < 0$.
2. Докажите, что для любых действительных чисел хотя бы одно из уравнений $x^2 + 2bx + 2c = 1$, $x^2 + 2cx + 2a = 1$, $x^2 + 2ax + 2b = 1$ имеет действительный корень.
3. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Описанная окружность треугольника AIC , пересекает отрезок BC в точке D . Докажите, что $AB = BD$.
4. На витрине ювелирного магазина выставлены в ряд 2019 бриллиантов. Вес каждого бриллианта составляет целое число карат, и никакой бриллиант не весит более 1000 карат. Известно, что веса любых двух соседних бриллиантов отличаются ровно на 1 карат, а общий вес всех бриллиантов измеряется четным числом карат. Грабители Вася и Петя решили ограбить магазин и разделить бриллианты на две кучки равного веса. Докажите, что они всегда смогут это сделать.
5. Пусть x, y, z – действительные числа такие, что все три числа $x + 2y$, $y + 2z$, $z + 2x$ – рациональные. Докажите, что x, y, z – также рациональны.
6. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ выполнено равенство $AC + BC = AD + BD$. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.
7. В клетках квадрата 10×10 расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем квадрате также положительна?
8. На доске написаны четыре многочлена: два многочлена $x^2 - 1$ и два многочлена $x - 1$. Разрешается дописывать на доску сумму или произведение любых двух из написанных на доске многочленов. Можно ли получить многочлен, у которого есть корень
 - а) $x = 2007$;
 - б) $x = \frac{1}{2007}$?