

Четырнадцатый Южный математический турнир

ВДЦ «Орленок», 20–28.09.2019

27.09.2019. Лига Гранд. Финал.

1. По сторонам угла PAQ скользит отрезок BC постоянной длины (B на AP , C на AQ). Докажите, что точка Нагеля треугольника ABC движется по окружности.
2. В пространстве точки S и T лежат по разные стороны от плоскости выпуклого пятиугольника $ABCDE$. Объединение пирамид $SABCDE$ и $TABCDE$ оказалось выпуклой бипирамидой, в которую можно вписать сферу. Внутри бипирамиды выбирается сфера, касающаяся всех боковых граней пирамиды $SABCDE$ и пересекающая плоскость $ABCDE$ по окружности ω . Докажите, что существует сфера, касающаяся всех боковых граней пирамиды $TABCDE$ и содержащая окружность ω .
3. Есть n действительных чисел. Известно, что сумма их k -х степеней равна 0 при всех нечетных k , не превосходящих n . Докажите, что сумма их k -х степеней равна 0 при всех нечетных k .
4. Пусть n и k — натуральные числа, причем $\underbrace{\varphi(\varphi(\dots\varphi(n)\dots))}_{k \text{ раз}} = 1$. Докажите, что $n \leq 2 \cdot 3^{k-1}$.
(Здесь φ — функция Эйлера.)
5. Пусть p — простое число. Докажите, что целочисленная рекуррента, заданная соотношением $x_n = x_{n-1} + x_{n-p}$ по модулю p периодична с периодом, делящим $p^2 - 1$.
6. Пусть \leftarrow означает соответствующую клавишу на клавиатуре. Если открыть текстовый редактор и последовательно нажать клавиши «ab←cd←←e←←f», то получится «faecdb». Назовём строку B *достижимой* из строки A , если можно вставить в A несколько \leftarrow так, что после вбивания получится строка B . Докажите, что B достижима из A тогда и только тогда, когда A достижима из B .
7. Существует ли последовательность $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ положительных вещественных чисел такая, что для любого натурального m выполнялось равенство $b_m + b_{2m} + b_{3m} + b_{4m} + \dots = \frac{1}{m}$?
8. В полном графе на n вершинах ориентировали ребра так, что нет ориентированного цикла на 4 вершинах. Какое максимальное число ориентированных циклов на 3 вершинах может быть?
9. Существуют ли два бесконечных непересекающихся множества точек пространства A и B таких, что выполнены следующие три условия:
(I) В объединении A и B нет четырех точек, лежащих в одной плоскости;
(II) Расстояние между любыми двумя точками из $A \cup B$ не меньше 1;
(III) Внутри любого тетраэдра с вершинами в точках множества A найдется хотя бы одна точка множества B и наоборот, внутри любого тетраэдра с вершинами в точках множества B найдется хотя бы одна точка множества A ?
10. Код в кодовом замке — фиксированная конечная последовательность из n цифр — 0 и 1. Каждую минуту Ваня последовательно бросает монету и нажимает «1», если выпал орел, и нажимает «0», если выпала решка. Если в какой-то момент последние нажатые n цифр образуют код, то замок мгновенно открывается. Докажите, что матожидание времени от начала процесса до времени открытия замка равно целому числу минут.