

XVI ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР
Лицей «Сириус»

Высшая Старт-лига. Финал. 08.10.2021

1. При каких $n \geq 4$ существует набор из n положительных попарно различных a_i , что выполняется равенство

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} = \frac{a_2}{a_3 + a_4} = \dots = \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} = \frac{a_n}{a_1 + a_2}?$$

2. Папа учит трёхлетнего сына Диму свойствам шахматных фигур. Он выставляет по очереди на доску королей и ладей (начинает с короля). В момент постановки папой фигуры, если она бьёт одну или несколько других фигур, Дима снимает одну из побитых ею фигур. Какое наибольшее количество фигур папа и Дима смогут совместными усилиями выставить на шахматную доску?
3. На плоскости нарисован квадрат площади 1. С помощью только циркуля постройте фигуру площади 2.
4. Во время лекции по безопасности информации в Цветочном городе Знайка предложил малышам отгадать загаданное им натуральное число из первой сотни. Для этого каждый малыш пишет на одной карточке не более 5 различных натуральных чисел из первой сотни и предъявляет её для всеобщего обозрения. Затем Знайка одновременно указывает все карточки, на которых написано загаданное им число. Какое наименьшее число малышей может договориться между собой, чтобы отгадать число?
5. В стране Повторляндии есть купюры в 5555 повториков и 33 повториков. Купюру в 5555 повториков жители называют *пятак*ом, в 33 — *тройка*ом. Богач Пятёрочкин располагает только пятаками. Он пришёл в магазин «Троечка», где на данный момент в кассе лежат только тройки. Пятёрочкин хочет купить гинку за 363 повториков, шутрики за 1727 повториков, вецкот за 8888 повториков или заняян за 424242 повториков. Что из этого он не сможет купить?
6. В городе NN -ск оплата за транспорт действует следующим образом. При первой посадке с карточки пассажира списывается сумма R эннов, после чего в течение часа можно сделать бесплатно ещё максимум 5 пересадок в другой транспорт. При этом вся сумма R делится поровну между владельцами транспорта за каждую поездку, проведённую в этот период, но за каждую поездку владелец должен получить целое число эннов, не меньшее 15. При каком наименьшем R такое возможно?
7. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство
- $$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq 9.$$
8. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C$ — прямой) проведены биссектрисы AK и BL . Точки M и N — проекции L и K на AK и BL соответственно. Известно, что $LM = KN$. Докажите, что $\triangle ABC$ — равнобедренный.