

Семнадцатый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 12-20.09.2022

Юниор-лига. 3 тур. 17.09.2022

1. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел таких, что их разность $a - b$ является пятой степенью простого числа и $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$.

2. На хорде AB окружности S выбраны точки G и H таким образом, что $AG = GH = HB = 1$. Точка F – середина одной из дуг AB . Лучи FH и FG повторно пересекают S в точках C и D соответственно. Докажите, что $CD = BC^2$.

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$, центр описанной окружности которого лежит внутри него, пересекаются в точке S . Точки P и Q – середины сторон AD и BC . Докажите, что прямые, проведённые через точки P, Q и S перпендикулярно прямым AC, BD и CD соответственно, пересекаются в одной точке.

4. На доске написано число $n + \frac{1}{2}$, где n – натуральное число. Каждую минуту число на доске умножают на наименьшее целое число, не меньшее его. Существует ли n , для которого число на доске впервые станет целым ровно через 2022 минуты?

5. На плоскости сидят шесть мух. Есть мухобойка, представляющая собой объединение всех чёрных клеток бесконечной шахматной доски (белые клетки – это дыры). Обязательно ли можно расположить мухобойку так (ее можно сдвигать и поворачивать), чтобы она попала хотя бы по пяти мухам? Считаем, что если муха попала на границу клетки, то мухобойка по ней попала.

6. Для вещественных чисел x, y докажите неравенство

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+4)^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y+4)^2} \leq \\ & \leq \sqrt{(x-2)^2 + (y-6)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2} + 20. \end{aligned}$$

7. В каждом из двух больших домов живёт по 128 человек. Закон о реновации позволяет провести операцию: выбрать одинаковое количество жильцов в обоих домах и переселить тех, кто жил в первом доме, во второй, а тех, кто жил во втором – в первый. За какое наименьшее количество операций можно добиться того, чтобы каждые два жильца хотя бы раз оказались в разных домах?

8. Можно ли так расставить натуральные числа во всех клетках таблицы 17×17 , чтобы для каждой клетки сумма чисел в клетках, соседних с ней по стороне, давала остаток 1 при делении на 3?