Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Лига "Гранд", 3 тур. 16.09.2011

1. Три окружности k_1, k_2, k_3 попарно касаются друг друга внешним образом. В окружностях проведены диаметры A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 такие что векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$ сонаправленные. Докажите, что прямые A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 пересекаются в одной точке.

2. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие что $af(a)+bf(b)+2ab$ является точным квадратом для любых натуральных a, b.

3. В город привезли 200 бочек кваса. Пятеро злодеев подсыпали в одну из бочек яд. Если человек выпивает квас с ядом, то в течение суток он умирает. Злодеи были пойманы, и городские власти хотят выяснить, какие бочки можно пускать в продажу. Для этого они могут давать выпить квас из любой бочки любому злодею. Какое наибольшее число безопасных бочек можно определить за двое суток?

4. Докажите, что вещественное число x является целым тогда и только тогда, когда для каждого натурального n имеет место равенство $[x] + [2x] + [3x] + \ldots + [nx] = \frac{n([x]+[nx])}{2}$.

5. Даны положительные числа $x_1, \ldots, x_n$, сумма которых равна n. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_n}{x_1} + n \geqslant 2(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n}).$$

6. Все стороны и диагонали выпуклого n-угольника покрашены в 2 цвета. Докажите, что найдется не менее $\left[\frac{n+1}{3}\right]$ одноцветных отрезков, никакие два из которых не имеют общих точек (даже вершины).

7. Докажите, что площадь выпуклого пятиугольника, длины сторон которого равны $a_1, a_2, \ldots, a_5$, не превосходит $\frac{1}{5} \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} a_i a_j$.

8. По разные стороны от плоскости треугольника ABC расположены точки S и P такие, что $SA = SB = SC$ и $PA \perp PB$, $PB \perp PC$, $PC \perp PA$. Известно, что объём пирамиды $PABC$ вдвое больше объёма пирамиды $SABC$. Докажите, что прямая SP проходит через точку пересечения медиан треугольника ABC.

9. Пусть $n \geqslant 10$. Вершины графа — трехэлементнтные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ребром соединены два подмножества, если их пересечение содержит не более одного элемента. Найдите наименьшее количество красок, в которое можно окрасить вершины графа так, чтобы вершины, соединенные ребром, были окрашены в разные цвета.

10. Различные натуральные числа a, b, c, d меньше простого числа p. Оказалось, что числа a^4, b^4, c^4, d^4 дают одинаковые остатки при делении на p. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ делится на $a + b + c + d$.

Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Третий тур. Премьер-лига. 16 сентября 2011 г.

1. Числа $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ – перестановка различных положительных чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. Докажите, что $(a_1^2+b_1)(a_2^2+b_2)\ldots(a_n^2+b_n) \geqslant (a_1^2+a_1)(a_2^2+a_2)\ldots(a_n^2+a_n)$.

2. Докажите, что вещественное число x является целым тогда и только тогда, когда для каждого натурального n имеет место равенство $[x]+[2x]+[3x]+\ldots+[nx]=\frac{n([x]+[nx])}{2}$.

3. По разные стороны от плоскости треугольника ABC расположены точки S и P такие, что $SA=SB=SC$ и $PA\perp PB\perp PC\perp PA$. Известно, что объём пирамиды $PABC$ вдвое больше объёма пирамиды $SABC$. Докажите, что прямая SP проходит через точку пересечения медиан треугольника ABC.

4. Точки D, E, F – середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно. Докажите, что $\angle DAC=\angle ABE$ тогда и только тогда, когда $\angle AFC=\angle BDA$.

5. В таблице 2011×2011 каждая клетка (x,y) задается номерами x и y ее столбца и строки. Некоторые клетки закрашены. Пусть $S_{i,j}$ – множество всех закрашенных клеток (x,y), для которых $x\leqslant i$ и $y\leqslant j$. В начале в каждую закрашенную клетку (i,j) записывают количество $|S_{i,j}|$ клеток в множестве $S_{i,j}$. На n-м шаге в каждую закрашенную клетку записывают сумму всех чисел, стоящих в клетках множества $S_{i,j}$ после $(n-1)$-го шага. Докажите, что после какого-то шага все числа в закрашенных клетках будут нечетны.

6. В город привезли 200 бочек кваса. Пятеро злодеев подсыпали в одну из бочек яд. Если человек выпьет квас с ядом, он внезапно умрёт в какой-то момент в течение ближайших 23 часов. Злодеи были пойманы, и городские власти хотят выяснить, какие бочки можно пускать в продажу. Для этого они могут дать выпить квас из любой бочки любому злодею в любое время. Какое наибольшее число безопасных бочек можно определить за двое суток?

7. Различные натуральные числа a, b, c, d меньше простого числа p. Оказалось, что числа a^4, b^4, c^4, d^4 дают одинаковые остатки при делении на p. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2$ делится на $a+b+c+d$.

8. По кругу расставлены несколько чисел, сумма которых положительна. Среди всех сумм чисел, стоящих подряд, выбрали наибольшую S и наименьшую s. Докажите, что $S+s>0$.

Шестой Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 12-18.09.2011

Третий тур. Старт-лига. 16 сентября 2011 г.

1. В город привезли 30 бочек кваса. Пятеро злодеев подсыпали в одну из бочек яд. Если человек выпивает квас с ядом, то в течении суток он умирает. Злодеи были пойманы, и городские власти хотят выяснить, какие бочки можно пускать в продажу. Для этого они могут давать выпить квас из любой бочки любому злодею. Какое наибольшее число безопасных бочек можно определить за одни сутки?

2. Бессмертная гусеница ползет вверх по дереву. Если к полуночи она оказывается в x см от земли, то за следующие сутки она поднимается еще на $1/x$ см. Сможет ли она подняться на 1 м за 25 лет, если за первый день она поднялась на 1 см от земли?

3. Дан равносторонний треугольник ABC. На продолжении BC за точку C взята точка N. Точка M отрезка AC такова, что $BM = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

4. Дано четное натуральное n. Известно, что при некотором натуральном k число $n^k + n^{k-1} + \ldots + n + 1$ является точным квадратом. Докажите, что n делится на 8.

5. Какое наименьшее количество подряд идущих натуральных чисел, меньших 2011, надо взять, чтобы их произведение делилось на любое натуральное число, меньшее 2011?

6. Ковбои Джо, Гарри и Сэм в баре играют в азартную карточную игру. Они перемешивают три карты: тройку, семерку и туза и раздают их по одной. Кто получил тройку, тот выставляет друзьям P кружек пива, кто семерку – Q кружек, а кто туза – R кружек, причем $P < Q < R$. После нескольких таких игр (больше одной) оказалось, что Джо выставил 20 кружек, Гарри выставил 10, а Сэм – всего 9 кружек. Известно, что в последней игре Гарри получил туза. Кому в первой игре досталась семерка?

7. Можно ли какую-нибудь неравнобедренную трапецию одним прямолинейным разрезом разделить на две одинаковые части?

8. Можно ли раскрасить клетки доски 5×5 в два цвета так, что никакие четыре клетки, получающиеся при пересечении некоторых двух строк и двух столбцов, не были бы окрашены в один цвет?