

Первый тур.

1. В графе 100 вершин и 200 ребер. Докажите, что в нем есть 2 простых цикла одинаковой длины.

2. В прямоугольнике $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AN и AK на биссектрисы углов ACD и ACB соответственно, а из вершины C — перпендикуляры CL и CM на биссектрисы углов CAB и CAD соответственно. Докажите, что $NKLM$ — квадрат.

3. На экране компьютера — натуральное число, большее единицы. Каждую секунду программа умножает его на 9, а затем стирает одну из цифр полученного числа, но не первую (при этом старое число исчезает). Докажите, что рано или поздно какое-то из чисел появится на экране не в первый раз.

4. Дан куб со стороной 1. На каркасе сидят 9 пауков, при этом расстояние между любыми двумя (измеряемое кратчайшим путем по ребрам куба) не меньше R . При каком наибольшем R это возможно?

5. Числа x , y , z не равны 0 и $x + 2y + 4z = 0$. Чему может быть равно выражение $\frac{x^2}{8yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{8z^2}{xy}$?

6. Артур разделил некоторое число на 333 и обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Тимур разделил то же самое число на 777 и тоже обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Найдите исходное число.

7. В треугольнике ABC ($AB > AC$) на стороне AB и касательной к его описанной окружности в точке A выбраны точки P и Q таким образом, что $AP = AQ = AC$. Докажите, что прямая PQ проходит через точку, равноудаленную от прямых AB , BC и CA .

8. Рассмотрим всевозможные графики функций вида $y = kx + b$, где k — двузначное, b — трехзначное числа. Какое наибольшее количество этих графиков пересекается в одной точке, не лежащей на осях координат?