

Девятый Южный математический турнир. ВДЦ "Орлёнок".

20 сентября 2014 г.

Блиц-бой.

1. Решите систему  $2y = x + \frac{17}{x}$ ,  $2z = y + \frac{17}{y}$ ,  $2w = z + \frac{17}{z}$ ,  $2x = w + \frac{17}{w}$ .
2.  $O$  – центр правильного пятиугольника  $ABCDE$ .  $AP$ ,  $AQ$  и  $AR$  – перпендикуляры, опущенные из  $A$  на  $CD$ , продолжение  $CB$  за точку  $B$  и продолжение  $DE$  за точку  $E$  соответственно. Известно, что  $OP = 1$ . Найдите  $AO + AQ + AR$ .
3. Катеты прямоугольного треугольника параллельны координатным осям, а медианы лежат на прямых  $y = 3x + 1$  и  $y = mx + 2$ . Найдите все  $m$ , при которых это возможно.
4. В шкафу лежат 100 красных, 80 зелёных, 60 синих и 40 чёрных носков. Сколько носков нужно вытянуть из шкафа не глядя, чтобы среди вытянутых оказалось не менее 10 (непересекающихся :) ) пар носков?
5. Найдите все непостоянные многочлены  $f(x)$ , для которых  $f(x^2) = (f(x))^2 = f(f(x))$ .
6.  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  – три непересекающихся множества людей. Средний возраст членов множеств  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $X \cup Y$ ,  $X \cup Z$  и  $Y \cup Z$  – 37, 23, 41, 29,  $39\frac{1}{2}$  и 33 соответственно. Каков средний возраст членов  $X \cup Y \cup Z$ ?
7. Пять человек сидят за круглым столом. Пусть  $f \geq 0$  – количество людей, рядом с которыми сидит хотя бы одна женщина, а  $m \geq 0$  – количество людей, рядом с которыми сидит хотя бы один мужчина. Сколько возможно разных упорядоченных пар  $(f, m)$ ?
8. Углы  $A$  и  $C$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  – прямые. Точки  $E$  и  $F$  – основания перпендикуляров, опущенных на  $AC$  из  $D$  и  $B$  соответственно. Известно, что  $AE = 3$ ,  $DE = 5$ ,  $CE = 7$ . Найдите  $BF$ .