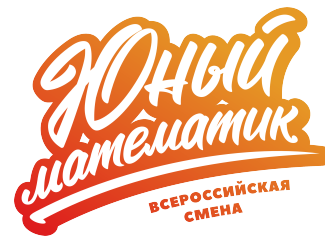


Математическая игра «7 чудес». 10–11 классы.

Решения и ответы



Задача 1. Площадь треугольника ABC равна 21, а $BC = 7$. В треугольнике ABC расположен квадрат $XYZT$ так, что X лежит на AB , Y — на AC , а Z и T — на BC . Найдите сторону квадрата. Ответ представьте в виде несократимой дроби и запишите подряд её числитель и знаменатель.

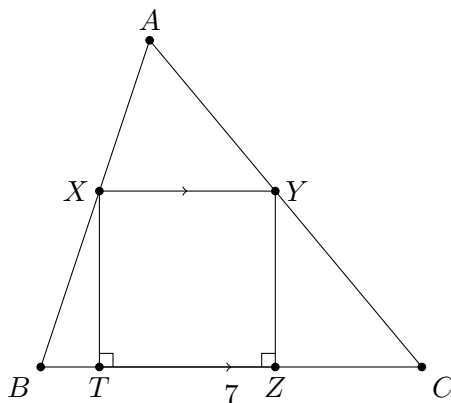
Решение. Высота треугольника, проведённая к BC , равна $2 \cdot 21/7 = 6$. Пусть сторона квадрата равна s . Поскольку $XY \parallel BC$, треугольники AXY и ABC подобны. Их высоты, проведённые из A к XY и BC , равны соответственно $6 - s$ и 6 . Поэтому

$$\frac{XY}{BC} = \frac{6 - s}{6}.$$

Так как $XY = s$ и $BC = 7$, получаем

$$\frac{s}{7} = \frac{6 - s}{6},$$

откуда $13s = 42$ и $s = \frac{42}{13}$.



Ответ. 42/13.

Задача 2. Среди пяти островитян А, Б, В, Г и Д каждый является либо рыцарем, либо лжецом. А сказал: «Мы все одного типа». Б сказал: «Среди нас есть хотя бы один рыцарь». В сказал: «Г и Д одного типа». Г сказал: «В — лжец». Д промолчал. Сколько среди них рыцарей?

Решение. Б не может быть лжецом: тогда его фраза была бы ложной, то есть рыцарей среди пятерых не было бы. Но тогда слова А «Мы все одного типа» были бы правдой. Значит, Б — рыцарь. А — лжец: если бы А был рыцарем, то все пятеро были бы рыцарями, однако тогда фраза Г «В — лжец» оказалась бы ложной.

Г говорит правду ровно тогда, когда В — лжец, поэтому один из В и Г — рыцарь, а другой — лжец. Если В — рыцарь, из его правдивой фразы следует, что Д — лжец. Если В — лжец, его фраза ложна, значит, Г и Д разных типов; поскольку Г — рыцарь, Д — лжец. В обоих случаях рыцарей ровно двое: Б и один из пары В, Г.

Ответ. 2.

Задача 3. Найдите сумму всех положительных целых $n < 2025$, для которых НОД чисел $n^2 + 1$ и $2n + 1$ больше 1.

Решение. Общий делитель чисел $n^2 + 1$ и $2n + 1$ делит также

$$4(n^2 + 1) - (2n + 1)(2n - 1) = 5.$$

Значит, НОД больше 1 тогда и только тогда, когда оба числа делятся на 5. Из $2n + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ получаем $n \equiv 2 \pmod{5}$; при этом $n^2 + 1$ действительно делится на 5.

Подходящие числа: 2, 7, 12, ..., 2022. Их 405, поэтому сумма равна

$$\frac{405(2 + 2022)}{2} = 409860.$$

Ответ. 409860.

Задача 4. Десять одинаковых белых кубиков разложили по четырём различным коробкам: красной, жёлтой, зелёной и синей. Ни одна коробка не пуста. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы хотя бы в двух коробках оказалось одинаковое число кубиков?

Решение. Всего положительных решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ равно

$$C_9^3 = 84.$$

Если все четыре числа различны, то их сумма не меньше $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Значит, единственный набор различных количеств — 1, 2, 3, 4, и по четырём различным коробкам его можно распределить $4! = 24$ способами. Поэтому требуется

$$84 - 24 = 60.$$

Ответ. 60.

Задача 5. Для действительного x через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x , а через $\{x\} = x - [x]$ — его дробная часть. Найдите наименьшее положительное число x , для которого $[x]\{x\} \geq 3$. Десятичную дробь вводите через запятую.

Решение. Пусть $[x] = n$, $\{x\} = t$, где $0 \leq t < 1$. Тогда требуется $nt \geq 3$. При $n \leq 3$ это невозможно. При $n = 4$ наименьшее подходящее t равно $3/4$. Следовательно, минимальное x равно $4 + 3/4 = 4,75$.

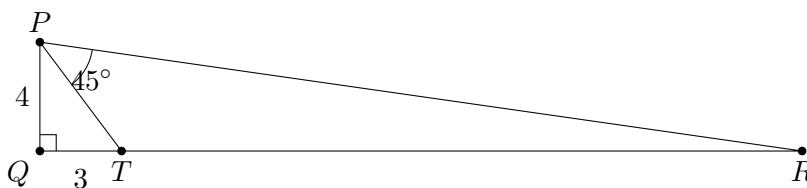
Ответ. 4,75.

Задача 6. Треугольник PQR прямоугольный с прямым углом при Q , $PQ = 4$. Точка T лежит на стороне QR , $QT = 3$, а $\angle TPR = 45^\circ$. Найдите TR .

Решение. Обозначим $QR = r$. Расположим $Q = (0, 0)$, $P = (0, 4)$, $T = (3, 0)$, $R = (r, 0)$. Угловые коэффициенты прямых PT и PR равны соответственно $-4/3$ и $-4/r$. Поэтому

$$\tan \angle TPR = \frac{\frac{4}{3} - \frac{4}{r}}{1 + \frac{16}{3r}} = \frac{4(r-3)}{3r+16}.$$

Так как угол равен 45° , получаем $4(r-3) = 3r+16$, откуда $r = 28$. Следовательно, $TR = 28 - 3 = 25$.



Ответ. 25.

Задача 7. В графе нет петель и кратных рёбер, а вершин на 10 меньше, чем рёбер. Какое наименьшее число циклов может быть в таком графе?

Решение. Пусть в графе V вершин, $E = V + 10$ рёбер и c компонент связности. В каждой компоненте выберем остовное дерево; всего в остовном лесу $V - c$ рёбер. Каждое ребро, не вошедшее в этот лес, вместе с единственным путём между его концами в соответствующем дереве образует цикл. Эти циклы различны, поскольку каждый содержит своё добавленное ребро. Таких рёбер

$$E - (V - c) = 10 + c \geq 11.$$

Значит, циклов не меньше 11. Оценка достигается для 11 треугольников с одной общей вершиной и без других общих вершин: тогда $V = 23$, $E = 33$, а циклов ровно 11.

Ответ. 11.

Задача 8. В конкурсе участвовали m учеников из Эмска и n учеников из Энска; других участников не было. Вероятность того, что два случайно выбранных участника окажутся из одного города, равна вероятности того, что они окажутся из разных городов. Найдите наибольшее возможное значение $m + n$, если $m + n \leq 2026$.

Решение. Равенство вероятностей эквивалентно равенству числа соответствующих пар:

$$C_m^2 + C_n^2 = mn.$$

После упрощения получаем $(m - n)^2 = m + n$. Следовательно, $m + n$ — полный квадрат. Наибольший квадрат, не превосходящий 2026, равен $45^2 = 2025$. Он достигается, например, при

$$m = \frac{2025 + 45}{2} = 1035, \quad n = 990.$$

Ответ. 2025.

Задача 9. Выписали все восьмизначные натуральные числа. Затем в каждом числе стёрли все цифры 0. Если нули разделяли ненулевые цифры, запись распалась на несколько чисел. Например, 89160000 превратилось в 8916, а 34041034 — в три числа 34, 41 и 34. Сколько чисел получилось всего?

Решение. Каждое получившееся число соответствует началу некоторого блока ненулевых цифр. Начало первого блока всегда находится на первой позиции, поэтому таких начал $9 \cdot 10^7$. На второй позиции новый блок начаться не может: первая цифра не равна нулю. Для каждой позиции с третьей по восьмую новый блок начинается тогда и только тогда, когда предыдущая цифра равна 0, а текущая ненулевая. Для фиксированной такой позиции имеется

$$9 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 10^5 = 8,1 \cdot 10^6$$

чисел. Таких позиций шесть. Итого

$$9 \cdot 10^7 + 6 \cdot 8,1 \cdot 10^6 = 138600000.$$

Ответ. 138600000.

Задача 10. Внутри треугольника со сторонами 17, 19 и 22 случайно и равномерно выбирают точку. Какова вероятность, что она находится ближе к стороне длины 22, чем к каждой из двух других сторон? Ответ представьте в виде несократимой дроби и запишите подряд её числитель и знаменатель.

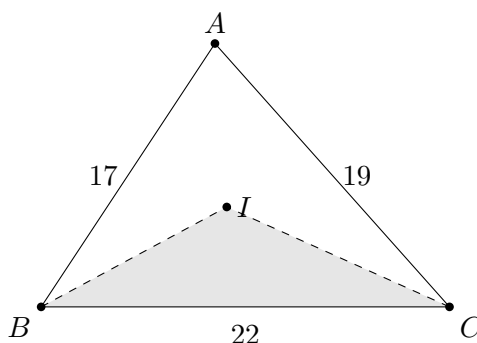
Решение. Обозначим сторону длины 22 через BC , а центр вписанной окружности через I . Равенство расстояний от точки до двух сторон задаётся биссектрисой угла между этими сторонами. Поэтому точки, которые ближе к BC , чем к двум другим сторонам, образуют треугольник BIC .

Пусть r — радиус вписанной окружности. Тогда

$$S_{BIC} = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot r = 11r.$$

Полупериметр исходного треугольника равен $(17 + 19 + 22)/2 = 29$, поэтому $S_{ABC} = 29r$. Искомая вероятность равна

$$\frac{S_{BIC}}{S_{ABC}} = \frac{11}{29}.$$



Ответ. 11/29.

Задача 11. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{-2x + 6y}{1 + 2x^2 + 3y^2},$$

где x и y — действительные числа. Ответ имеет вид $\sqrt{a}/b$, где a и b — натуральные числа, причём a не делится на квадрат натурального числа, большего 1. В ответе запишите через пробел a и b .

Решение. Положим $q = 2x^2 + 3y^2$. По неравенству Коши

$$(-2x + 6y)^2 \leq (2x^2 + 3y^2) \left(\frac{(-2)^2}{2} + \frac{6^2}{3} \right) = 14q.$$

Поэтому

$$\frac{-2x + 6y}{1 + 2x^2 + 3y^2} \leq \frac{\sqrt{14q}}{1 + q} \leq \frac{\sqrt{14}}{2},$$

так как $2\sqrt{q} \leq 1 + q$. Равенство в обоих неравенствах достигается: достаточно взять $x = -\lambda$, $y = 2\lambda$ и выбрать $\lambda > 0$ так, чтобы $14\lambda^2 = 1$.

Ответ. $\sqrt{14}/2$.

Задача 12. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый человек написал про каждого из остальных либо «рыцарь», либо «лжец». Всего слово «лжец» было написано 40 раз, а слово «рыцарь» — 32 раза. Сколько в комнате рыцарей, если известно, что их больше, чем лжецов?

Решение. Всего написано 72 слова. Если в комнате N человек, то каждый написал $N - 1$ слов, поэтому $N(N - 1) = 72$, откуда $N = 9$.

Пусть рыцарей K , а лжецов L . Каждый рыцарь называет лжецами всех L лжецов, а каждый лжец называет лжецами всех K рыцарей. Поэтому слово «лжец» написано $2KL = 40$ раз, то есть $KL = 20$. Вместе с $K + L = 9$ это даёт $\{K, L\} = \{4, 5\}$. По условию $K > L$, значит, $K = 5$.

Ответ. 5.

Задача 13. ABC — равносторонний треугольник со стороной 6. Точки D, E, F лежат соответственно на сторонах AB, BC, CA , причём DEF — равносторонний треугольник. Площадь треугольника DEF равна площади треугольника FAD . Найдите длину стороны треугольника DEF .

Решение. Пусть сторона треугольника DEF равна s . Так как $\angle DAF = 60^\circ$,

$$S_{FAD} = \frac{\sqrt{3}}{4} AD \cdot AF, \quad S_{DEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2.$$

Следовательно, $s^2 = AD \cdot AF$. С другой стороны, в треугольнике ADF по теореме косинусов

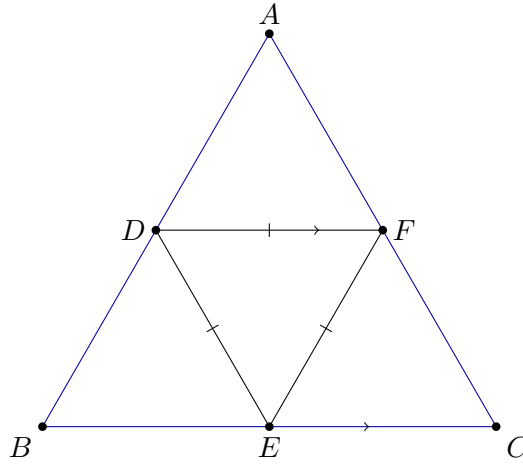
$$s^2 = AD^2 + AF^2 - AD \cdot AF.$$

Сравнивая равенства, получаем $(AD - AF)^2 = 0$. Значит, $AD = AF = s$, поэтому ADF равносторонний. Кроме того,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC},$$

так как $AB = AC = 6$; следовательно, по обратной теореме Фалеса $DF \parallel BC$.

Высота треугольника ABC равна $3\sqrt{3}$. Расстояние от A до DF равно $s\sqrt{3}/2$, а от DF до BC — также $s\sqrt{3}/2$. Поэтому $3\sqrt{3} = s\sqrt{3}$, откуда $s = 3$.



Ответ. 3.

Задача 14. Для действительного числа t через $[t]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее t , а через $\{t\} = t - [t]$ — его дробная часть. Число x удовлетворяет равенству $3x + \{x\} = 100$. Найдите $4x$.

Решение. Пусть $x = n + t$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq t < 1$. Тогда $3n + 4t = 100$. Отсюда $0 \leq 100 - 3n < 4$, поэтому $n = 33$. Тогда $4t = 1$, то есть $t = 1/4$. Следовательно,

$$4x = 4 \left(33 + \frac{1}{4} \right) = 133.$$

Ответ. 133.

Задача 15. Пять положительных целых чисел a, b, c, d, e записаны по кругу в этом порядке. Для каждого из пяти мест выписали суммы одного, двух, трёх и четырёх подряд идущих по кругу чисел, начиная с этого места, а также один раз сумму всех пяти чисел. Оказалось, что среди этих сумм встречается каждое целое число от 1 до 21 включительно. Известно, что $a = 1$ и $b = 5$. Найдите d .

Решение. Всего выписана $5 \cdot 4 + 1 = 21$ сумма. Среди них встречаются все числа $1, 2, \dots, 21$, поэтому каждая из этих сумм встречается ровно один раз. Наибольшая сумма — сумма всех пяти чисел, значит,

$$a + b + c + d + e = 21,$$

то есть $c + d + e = 15$.

Число 2 не может быть суммой двух или более подряд идущих чисел: только a равно 1, а каждое из остальных чисел не меньше 2. Поэтому одно из c, d, e равно 2.

Если $d = 2$, то число 3 должно совпадать с c или e ; тогда соответственно $c + d = 5$ или $d + e = 5$, что повторяет уже имеющуюся сумму $b = 5$. Если $e = 2$, то $e + a = 3$, а число 4 должно совпадать с c или d . Из $c + d = 13$ получаем $(c, d) = (4, 9)$ или $(9, 4)$; в первом случае $b + c = d = 9$, во втором $d + e = a + b = 6$, снова возникает повтор. Значит, $c = 2$.

Теперь число 3 должно совпадать с d или e . Если $d = 3$, то $c + d = 5 = b$, невозможно. Следовательно, $e = 3$, и $d = 15 - 2 - 3 = 10$.

Ответ. 10.

Задача 16. Вещественное число a удовлетворяет равенству $20 \sin a + 21 \cos a = 29$. Найдите $20 \sin 3a + 21 \cos 3a$. Ответ представьте в виде несократимой дроби и запишите подряд её числитель и знаменатель.

Решение. По неравенству Коши

$$20 \sin a + 21 \cos a \leq \sqrt{20^2 + 21^2} \sqrt{\sin^2 a + \cos^2 a} = 29.$$

По условию в неравенстве Коши достигается равенство:

$$\sin a = \frac{20}{29}, \quad \cos a = \frac{21}{29}.$$

Тогда

$$20 \sin 3a + 21 \cos 3a = 29(\sin a \sin 3a + \cos a \cos 3a) = 29 \cos 2a = 29 \cdot \frac{21^2 - 20^2}{29^2} = \frac{41}{29}.$$

Ответ. 41/29.

Задача 17. В классе 30 учеников. Каждый из них является либо отличником, либо двоечником, либо троечником. Отличники всегда отвечают правду, двоечники всегда лгут, а троечники при последовательных вопросах строго чередуют правдивые и ложные ответы; первый ответ троечника может быть как правдивым, так и ложным. Каждому ученику последовательно задали одни и те же три вопроса. На вопрос «Ты отличник?» «да» ответили 19 человек, на вопрос «Ты троечник?» — 12 человек, на вопрос «Ты двоечник?» — 9 человек. Сколько в классе троечников?

Решение. Отличник на три вопроса отвечает «да, нет, нет», а двоечник — «да, да, нет». У троечника возможны две схемы чередования. Если первый ответ правдивый, получаем «нет, нет, нет»; если первый ответ ложный — «да, да, да».

Пусть u — число троечников, у которых первый ответ ложный. По третьему вопросу «да» отвечают только они, значит, $u = 9$. По второму вопросу «да» отвечают двоечники и эти 9 троечников, поэтому двоечников $12 - 9 = 3$. По первому вопросу «да» отвечают отличники, двоечники и те же 9 троечников, поэтому отличников $19 - 3 - 9 = 7$. Следовательно, троечников $30 - 3 - 7 = 20$.

Ответ. 20.

Задача 18. Четырёхмерный куб со стороной 4 разбит на 4^4 единичных четырёхмерных кубика. Пингвин и рыба независимо друг от друга выбирают по одному из этих кубиков, причём каждый кубик для каждого из них равновероятен. Рыба остаётся в выбранном кубике. За одну секунду пингвин может перейти в соседний кубик, изменив ровно одну из четырёх координат на 1. Каково математическое ожидание наименьшего времени, за которое пингвин доберётся до рыбы?

Решение. Пронумеруем положения по каждой координате числами 1, 2, 3, 4. Минимальное число секунд равно сумме модулей разностей соответствующих координат:

$$|X_1 - Y_1| + \dots + |X_4 - Y_4|.$$

Для одной координаты X, Y независимы и равномерны на $\{1, 2, 3, 4\}$. Поэтому

$$\mathbb{E}|X - Y| = \frac{2(1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1)}{16} = \frac{5}{4}.$$

По линейности математического ожидания для четырёх координат получаем $4 \cdot \frac{5}{4} = 5$.

Ответ. 5.

Задача 19. Натуральное число N имеет 2025 цифр, причём первая цифра равна 3. Любые две соседние цифры образуют двузначное число, делящееся на 17 или на 23. Найдите сумму всех возможных цифр единиц числа N .

Решение. Подходящие двузначные числа:

$$17, 34, 51, 68, 85, 23, 46, 69, 92.$$

Значит, возможные переходы между соседними цифрами имеют вид

$$1 \rightarrow 7, \quad 3 \rightarrow 4, \quad 5 \rightarrow 1, \quad 6 \rightarrow 8, \quad 8 \rightarrow 5,$$

$$2 \rightarrow 3, \quad 4 \rightarrow 6, \quad 6 \rightarrow 9, \quad 9 \rightarrow 2.$$

От цифры 3 возникает цикл

$$3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

длины 5. Из цифры 6 можно вместо перехода к 9 уйти в цепочку

$$6 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 7,$$

после которой продолжения уже нет.

До последней цифры нужно сделать 2024 перехода. Если всё время идти по циклу, то $2024 \equiv 4 \pmod{5}$, поэтому последняя цифра равна 2.

Покинуть цикл можно только из цифры 6. В цикле она встречается после числа переходов, сравнимого с 2 по модулю 5. После выхода из 6 до конца цепочки можно сделать 1, 2, 3 или 4 перехода. Если до последней цифры остаётся r переходов, то

$$2024 - r \equiv 2 \pmod{5}.$$

При $1 \leq r \leq 4$ отсюда $r = 2$. Значит, в конце имеем $6 \rightarrow 8 \rightarrow 5$. Поэтому возможны только цифры 2 и 5.

Ответ. 7.

Задача 20. По кругу записаны n целых чисел. Хотя бы одно из них равно 0, любые два соседних числа отличаются ровно на 1, а сумма всех чисел равна 24. Найдите наименьшее возможное n .

Решение. При обходе круга чётность чисел каждый раз меняется, поэтому n чётно. Пусть $n = 2m$ и одно из чисел равно 0. Число, стоящее на расстоянии j шагов от этого нуля, не превосходит $\min(j, 2m - j)$: до него можно идти от нуля в любую из двух сторон. Поэтому сумма всех чисел не превосходит

$$0 + 1 + 2 + \dots + (m - 1) + m + (m - 1) + \dots + 1 = m^2.$$

При $n \leq 8$ имеем $m \leq 4$, так что сумма не больше 16. При $n = 10$ чётности чисел чередуются, поэтому среди десяти чисел ровно пять нечётных. Их сумма нечётна и не может равняться 24. Значит, $n \geq 12$.

Для $n = 12$ подходит, например, круговая последовательность

$$0, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1.$$

Соседние числа, включая последнее и первое, отличаются на 1, а сумма равна 24.

Ответ. 12.

Задача 21. $PABCD$ — пирамида с прямоугольным основанием $ABCD$. Известно, что $BP = 4$, $DP = 9$ и

$$\frac{\cos \angle APC}{\cos \angle BPD} = 2.$$

Найдите $AP + CP$. Ответ имеет вид $\sqrt{a}$, где a — натуральное число. В ответе запишите a .

Решение. Обозначим через O центр прямоугольника $ABCD$. По теореме Аполлония

$$PA^2 + PC^2 = 2PO^2 + 2AO^2, \quad PB^2 + PD^2 = 2PO^2 + 2BO^2.$$

Так как $AO = BO$, получаем

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2 = 4^2 + 9^2 = 97.$$

Обозначим $AC = BD = d$. По теореме косинусов в треугольниках APC и BPD

$$\cos \angle APC = \frac{97 - d^2}{2AP \cdot CP}, \quad \cos \angle BPD = \frac{97 - d^2}{2 \cdot 4 \cdot 9}.$$

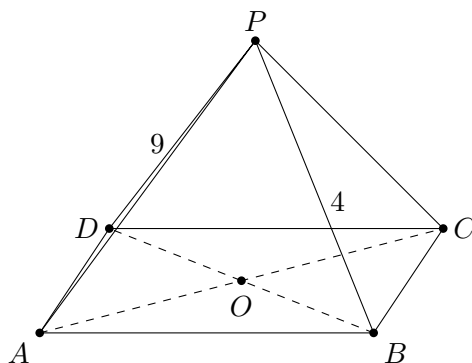
Поскольку данное в условии отношение определено, $\cos \angle BPD \neq 0$, а значит, $97 - d^2 \neq 0$. Поэтому общий множитель можно сократить. Получаем

$$\frac{36}{AP \cdot CP} = 2, \quad AP \cdot CP = 18.$$

Тогда

$$(AP + CP)^2 = AP^2 + CP^2 + 2AP \cdot CP = 97 + 36 = 133,$$

то есть $AP + CP = \sqrt{133}$.



Ответ. $\sqrt{133}$.

Задача 22. Действительные числа $x, y, z > 1$ удовлетворяют равенствам

$$x^{\log_y z} = 2, \quad y^{\log_z x} = 4, \quad z^{\log_x y} = 8.$$

Найдите $(\log_x y)^2$.

Решение. Положим $A = \ln x$, $B = \ln y$, $C = \ln z$ и $L = \ln 2$. После логарифмирования получаем

$$\frac{AC}{B} = L, \quad \frac{AB}{C} = 2L, \quad \frac{BC}{A} = 3L.$$

Разделив третье равенство на первое, получаем $B^2/A^2 = 3$. Но $B/A = \log_x y$, следовательно, $(\log_x y)^2 = 3$.

Ответ. 3.

Задача 23. У n -угольника, где $n > 3$, число диагоналей кратно 2025. Найдите наименьшее возможное n .

Решение. Число диагоналей равно $n(n-3)/2$, поэтому требуется

$$4050 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \mid n(n-3).$$

Числа n и $n-3$ имеют разную чётность, поэтому множитель 2 в произведении есть автоматически. Они не могут оба делиться на 5, следовательно, для делимости на 5^2 необходимо

$$n \equiv 0 \quad \text{или} \quad 3 \pmod{25}.$$

Кроме того, если $3 \nmid n$, то $3 \nmid (n-3)$, поэтому для делимости произведения на 3^4 необходимо $3 \mid n$. Пусть $n = 3m$. Тогда

$$n(n-3) = 9m(m-1),$$

и требуется $9 \mid m(m-1)$. Следовательно,

$$n \equiv 0 \quad \text{или} \quad 3 \pmod{27}.$$

Получаем четыре сочетания сравнений по модулям 25 и 27. Если $n \equiv 3$ по обоим модулям, то минимальное $n > 3$ равно 678; если $n \equiv 0$ по обоим, то минимальное значение равно 675. В смешанных случаях

$$n = 27k, \quad k \equiv 14 \pmod{25} \Rightarrow n \geq 378, \quad n = 25k, \quad k \equiv 12 \pmod{27} \Rightarrow n \geq 300.$$

Число 300 действительно подходит:

$$\frac{300 \cdot 297}{2} = 150 \cdot 297$$

кратно 2025.

Ответ. 300.

Задача 24. Для действительного t через $[t]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее t . Сколько корней имеет уравнение

$$[-(x-2)^2] = 2x - 4?$$

Решение. Левая часть — целое число, значит, $2x - 4$ целое. Положим $x - 2 = k/2$, где $k \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\left[-\frac{k^2}{4}\right] = k.$$

Левая часть неположительна, поэтому $k \leq 0$. Пусть $m = -k \geq 0$. Используя $[-u] = -[u]$, получаем

$$\left[\frac{m^2}{4}\right] = m.$$

Это равносильно

$$m - 1 < \frac{m^2}{4} \leq m.$$

Из правого неравенства $0 \leq m \leq 4$, а левое исключает только $m = 2$. Подходят $m = 0, 1, 3, 4$, то есть имеется 4 корня.

Ответ. 4.

Задача 25. Уравнение $x^4 - 56x + 15 = 0$ имеет комплексный корень вида $-a + i\sqrt{b}$, где a, b — положительные целые числа. Найдите $a + 10b$.

Решение. Разложим многочлен:

$$x^4 - 56x + 15 = (x^2 + 4x + 15)(x^2 - 4x + 1).$$

Первый множитель имеет корни

$$x = -2 \pm i\sqrt{11}.$$

Следовательно, $a = 2$, $b = 11$, и $a + 10b = 112$.

Ответ. 112.

Задача 26. Для действительного числа x через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x , а через $\{x\} = x - [x]$ — его дробная часть. На экране записано число x . После нажатия кнопки оно заменяется на $x + \{x\}$. Сколько существует исходных чисел x , из которых число 10 можно получить не более чем за три нажатия?

Решение. Если $x = n + t$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq t < 1$, то после нажатия получается $y = n + 2t$. Поэтому $n \leq y < n + 2$: для заданного y возможны только два соседних целых значения n , и перечисление ниже даёт все прообразы. У числа 10 два прообраза:

$$10, \quad \frac{19}{2}.$$

У $19/2$ появляются ещё два новых прообраза:

$$\frac{35}{4}, \quad \frac{37}{4}.$$

Наконец,

$$\frac{35}{4} \leftarrow \frac{63}{8}, \frac{67}{8}, \quad \frac{37}{4} \leftarrow \frac{69}{8}, \frac{73}{8}.$$

Таким образом, за не более чем три нажатия к 10 приводят ровно

$$10, \frac{19}{2}, \frac{35}{4}, \frac{37}{4}, \frac{63}{8}, \frac{67}{8}, \frac{69}{8}, \frac{73}{8},$$

то есть 8 чисел.

Ответ. 8.

Задача 27. Назовём тройку различных положительных целых чисел (a, b, c) лестницей, если a делит b , а b делит c . Сколько чисел вида p^k , не превосходящих 2026, где p — простое число, а k — положительное целое число, нельзя представить в виде суммы чисел некоторой лестницы?

Решение. Любая лестница имеет вид

$$a, \quad au, \quad auv,$$

где $u, v \geq 2$ — целые числа.

Любое нечётное число $N = p^k \geq 7$ представимо в виде

$$N = 1 + 2 + (N - 3),$$

причём $1 \mid 2 \mid (N - 3)$, поскольку $N - 3$ чётно. Любая степень двойки 2^k при $k \geq 4$ также представима: умножим лестницу $1, 3, 12$, сумма которой равна 16, на 2^{k-4} .

Остаются $2, 3, 4, 5, 8$. Числа меньше 7 представить нельзя, поскольку минимальная сумма лестницы равна $1 + 2 + 4 = 7$. Покажем, что нельзя представить и 8. Если $a \geq 2$, то сумма лестницы не меньше $2 + 4 + 8 = 14$. Если $a = 1$, то $b \geq 2$ и c — кратное b , большее b . При $b = 2$ получаем либо минимальную сумму $1 + 2 + 4 = 7$, либо уже не меньше $1 + 2 + 6 = 9$; при $b \geq 3$ сумма не меньше $1 + 3 + 6 = 10$.

Ответ. 5.

Задача 28. Квадрат разбит на 3×3 одинаковые клетки. В каждой клетке проводят ровно одну из двух диагоналей. Сколькими способами можно выбрать диагонали так, чтобы по проведённым отрезкам существовал путь из левого нижнего угла большого квадрата в правый верхний?

Решение. Раскрасим вершины клетчатой сетки в шахматном порядке. Оба нужных угла имеют один цвет. В каждой клетке ровно одна из двух диагоналей соединяет вершины этого цвета. Поэтому для каждой клетки достаточно выбрать, включать ли соответствующее ребро в граф на вершинах этого цвета.

Получается граф из 9 возможных рёбер. У начальной и конечной вершин степень 1, поэтому два крайних ребра обязаны быть выбраны. Обозначим две внутренние вершины через U и V . Между U и V остаются три пути, не имеющие общих рёбер: ребро UV и два пути длины 3.

Если прямое ребро выбрано, остальные шесть рёбер можно выбирать произвольно: $2^6 = 64$ варианта. Если оно не выбрано, должен целиком присутствовать хотя бы один из двух трёхрёберных путей. Для шести рёбер этих путей получаем

$$2^3 + 2^3 - 1 = 15$$

вариантов. Итого $64 + 15 = 79$.

Ответ. 79.

Задача 29. Положительные целые числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$\text{НОД}(\text{НОК}(a, b), \text{НОК}(a, c), \text{НОК}(b, c)) = 2025.$$

Найдите наименьшее возможное значение $a + b + c$.

Решение. Рассмотрим показатель любого простого p в числах a, b, c : пусть это α, β, γ . В трёх попарных НОК показатели равны

$$\max(\alpha, \beta), \quad \max(\alpha, \gamma), \quad \max(\beta, \gamma).$$

Минимум этих трёх чисел равен второму по величине из α, β, γ , то есть их медиане. Следовательно, для каждого простого в условии задан именно этот показатель.

Так как $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, по меньшей мере два из чисел a, b, c делятся на $3^4 = 81$, и по меньшей мере два — на $5^2 = 25$. Эти две пары чисел обязательно имеют общий элемент, который делится на $81 \cdot 25 = 2025$. Если общих элементов два, сумма не меньше $2025 + 2025 + 1$. Если общий элемент один, два остальных числа должны быть не меньше 81 и 25, поэтому

$$a + b + c \geq 2025 + 81 + 25 = 2131.$$

Равенство достигается для чисел 2025, 81, 25: их попарные НОК равны соответственно 2025, 2025, 2025.

Ответ. 2131.

Задача 30. В математическом турнире у каждой команды есть одинаковый набор из 16 задач, пронумерованных от 1 до 16. В начале команда получает задачи 1, 2 и 3. Каждый раз, когда команда решает одну из находящихся у неё задач, если ещё остались невыданные задачи, вместо неё выдаётся задача с наименьшим номером среди ещё не выдававшихся этой команде. После турнира оказалось, что никакие две команды не решили в точности один и тот же набор задач. Какое наибольшее число команд могло участвовать?

Решение. Посчитаем, какие множества решённых задач вообще возможны. Пусть команда решила ровно k задач и их номера в возрастающем порядке равны

$$s_1 < s_2 < \dots < s_k.$$

Перед i -м решением уже решено $i - 1$ задач, поэтому к этому моменту выданы задачи не дальше номера $i + 2$. Следовательно, $s_i \leq i + 2$. Обратно, если эти неравенства выполнены, можно решать задачи в порядке $s_1, s_2, \dots, s_k$, и каждая из них к нужному моменту уже будет выдана. Следовательно, условие $s_i \leq i + 2$ необходимо и достаточно.

Для фиксированного $k \leq 14$ достаточно выбрать любые k задач из первых $k + 2$: тогда автоматически $s_i \leq i + 2$. Таких множеств

$$C_{k+2}^k = C_{k+2}^2.$$

При $k = 15$ возможны все 15-элементные подмножества из 16, то есть 16 вариантов; при $k = 16$ — один. Пустое множество тоже возможно.

Для $k = 1, 2, \dots, 14$ получаем соответственно

$$C_3^2, C_4^2, C_5^2, \dots, C_{16}^2$$

наборов. По формуле «хоккейной клюшки»

$$C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + \dots + C_{16}^2 = C_{17}^3 - C_2^2 = 680 - 1 = 679.$$

Поэтому общее число различных наборов, а значит и наибольшее число команд, равно

$$1 + 679 + 16 + 1 = 697.$$

Ответ. 697.

Задача 31. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый житель посещает ровно один из трёх кружков: шахматный, театральный или робототехнический. Каждому жителю задали три вопроса: посещает ли он шахматный, театральный и робототехнический кружки. На вопрос про шахматный кружок «да» ответили 40% жителей, про театральный — 50%, про робототехнический — 60%. На сколько число рыцарей, посещающих театральный кружок, отличается от числа лжецов, посещающих его?

Решение. Пусть всего жителей N , из них K рыцарей и L лжецов. Каждый рыцарь отвечает «да» ровно на один из трёх вопросов, а каждый лжец — ровно на два. Поэтому общее число ответов «да» равно

$$K + 2L = (0,4 + 0,5 + 0,6)N = 1,5N.$$

Так как $K + L = N$, получаем $L = N/2$ и $K = N/2$.

Пусть театральный кружок посещают K_T рыцарей и L_T лжецов. На вопрос о театральном кружке «да» отвечают театральные рыцари и все лжецы, не посещающие этот кружок. Поэтому

$$K_T + (L - L_T) = 0,5N.$$

Но $L = 0,5N$, значит, $K_T = L_T$.

Ответ. 0.

Задача 32. Сколько целых чисел от 1 до 2025 включительно нельзя представить в виде

$$x([x] + \lceil x \rceil),$$

где x — положительное действительное число, $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x , а $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, не меньшее x ?

Решение. Если $0 < x < 1$, то $[x] = 0$, $\lceil x \rceil = 1$, и выражение равно x , поэтому положительных целых значений в этом случае нет. Далее пусть $n = [x] \geq 1$.

Если $x = n$ — целое число, выражение равно $2n^2$. Если $n < x < n + 1$, то $\lceil x \rceil = n + 1$ и выражение равно $(2n + 1)x$. При изменении x от n до $n + 1$ оно пробегает все вещественные значения строго между

$$2n^2 + n \quad \text{и} \quad 2n^2 + 3n + 1.$$

Следовательно, целые значения в этом случае — все числа

$$2n^2 + n + 1, 2n^2 + n + 2, \dots, 2n^2 + 3n,$$

их ровно $2n$. Вместе со значением $2n^2$ для каждого $n \geq 1$ получаем $2n + 1$ представимое целое число. При $n = 1, 2, \dots, 31$ все эти значения не превосходят 2025: для $n = 31$ последний интервал заканчивается числом 2015, а $2 \cdot 32^2 = 2048 > 2025$. Наборы значений для разных n не пересекаются. Для $n = 1, 2, \dots, 31$ число представимых значений равно соответственно

$$3, 5, 7, \dots, 63.$$

Поэтому всего представимых чисел

$$3 + 5 + 7 + \dots + 63 = \frac{(3 + 63) \cdot 31}{2} = 1023.$$

Значит, непредставимых чисел $2025 - 1023 = 1002$.

Ответ. 1002.