

Математическая игра «7 чудес». 10–11 классы.

Условия



Задача 1. Площадь треугольника ABC равна 21, а $BC = 7$. В треугольнике ABC расположен квадрат $XYZT$ так, что X лежит на AB , Y — на AC , а Z и T — на BC . Найдите сторону квадрата.

Задача 2. Среди пяти островитян А, Б, В, Г и Д каждый является либо рыцарем, либо лжецом. А сказал: «Мы все одного типа». Б сказал: «Среди нас есть хотя бы один рыцарь». В сказал: «Г и Д одного типа». Г сказал: «В — лжец». Д промолчал. Сколько среди них рыцарей?

Задача 3. Найдите сумму всех положительных целых $n < 2025$, для которых НОД чисел $n^2 + 1$ и $2n + 1$ больше 1.

Задача 4. Десять одинаковых белых кубиков разложили по четырём различным коробкам: красной, жёлтой, зелёной и синей. Ни одна коробка не пуста. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы хотя бы в двух коробках оказалось одинаковое число кубиков?

Задача 5. Для действительного x через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x , а через $\{x\} = x - [x]$ — его дробная часть. Найдите наименьшее положительное число x , для которого $[x]\{x\} \geq 3$.

Задача 6. Треугольник PQR прямоугольный с прямым углом при Q , $PQ = 4$. Точка T лежит на стороне QR , $QT = 3$, а $\angle TPR = 45^\circ$. Найдите TR .

Задача 7. В графе нет петель и кратных рёбер, а вершин на 10 меньше, чем рёбер. Какое наименьшее число циклов может быть в таком графе?

Задача 8. В конкурсе участвовали m учеников из Эмска и n учеников из Энска; других участников не было. Вероятность того, что два случайно выбранных участника окажутся из одного города, равна вероятности того, что они окажутся из разных городов. Найдите наибольшее возможное значение $m + n$, если $m + n \leq 2026$.

Задача 9. Выписали все восьмизначные натуральные числа. Затем в каждом числе стёрли все цифры 0. Если нули разделяли ненулевые цифры, запись распалась на несколько чисел. Например, 89160000 превратилось в 8916, а 34041034 — в три числа 34, 41 и 34. Сколько чисел получилось всего?

Задача 10. Внутри треугольника со сторонами 17, 19 и 22 случайно и равномерно выбирают точку. Какова вероятность, что она находится ближе к стороне длины 22, чем к каждой из двух других сторон?

Задача 11. Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{-2x + 6y}{1 + 2x^2 + 3y^2},$$

где x и y — действительные числа.

Задача 12. В комнате находятся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый человек написал про каждого из остальных либо «рыцарь», либо «лжец». Всего слово «лжец» было написано 40 раз, а слово «рыцарь» — 32 раза. Сколько в комнате рыцарей, если известно, что их больше, чем лжецов?

Задача 13. ABC — равносторонний треугольник со стороной 6. Точки D, E, F лежат соответственно на сторонах AB, BC, CA , причём DEF — равносторонний треугольник. Площадь треугольника DEF равна площади треугольника FAD . Найдите длину стороны треугольника DEF .

Задача 14. Для действительного числа t через $[t]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее t , а через $\{t\} = t - [t]$ — его дробная часть. Число x удовлетворяет равенству $3x + \{x\} = 100$. Найдите $4x$.

Задача 15. Пять положительных целых чисел a, b, c, d, e записаны по кругу в этом порядке. Для каждого из пяти мест выписали суммы одного, двух, трёх и четырёх подряд идущих по кругу чисел, начиная с этого места, а также один раз сумму всех пяти чисел. Оказалось, что среди этих сумм встречается каждое целое число от 1 до 21 включительно. Известно, что $a = 1$ и $b = 5$. Найдите d .

Задача 16. Вещественное число a удовлетворяет равенству $20 \sin a + 21 \cos a = 29$. Найдите $20 \sin 3a + 21 \cos 3a$.

Задача 17. В классе 30 учеников. Каждый из них является либо отличником, либо двоечником, либо троечником. Отличники всегда отвечают правду, двоечники всегда лгут, а троечники при последовательных вопросах строго чередуют правдивые и ложные ответы; первый ответ троечника может быть как правдивым, так и ложным. Каждому ученику последовательно задали одни и те же три вопроса. На вопрос «Ты отличник?» «да» ответили 19 человек, на вопрос «Ты троечник?» — 12 человек, на вопрос «Ты двоечник?» — 9 человек. Сколько в классе троечников?

Задача 18. Четырёхмерный куб со стороной 4 разбит на 4^4 единичных четырёхмерных кубика. Пингвин и рыба независимо друг от друга выбирают по одному из этих кубиков, причём каждый кубик для каждого из них равновероятен. Рыба остаётся в выбранном кубике. За одну секунду пингвин может перейти в соседний кубик, изменив ровно одну из четырёх координат на 1. Каково математическое ожидание наименьшего времени, за которое пингвин доберётся до рыбы?

Задача 19. Натуральное число N имеет 2025 цифр, причём первая цифра равна 3. Любые две соседние цифры образуют двузначное число, делящееся на 17 или на 23. Найдите сумму всех возможных цифр единиц числа N .

Задача 20. По кругу записаны n целых чисел. Хотя бы одно из них равно 0, любые два соседних числа отличаются ровно на 1, а сумма всех чисел равна 24. Найдите наименьшее возможное n .

Задача 21. $PABCD$ — пирамида с прямоугольным основанием $ABCD$. Известно, что $BP = 4$, $DP = 9$ и

$$\frac{\cos \angle APC}{\cos \angle BPD} = 2.$$

Найдите $AP + CP$.

Задача 22. Действительные числа $x, y, z > 1$ удовлетворяют равенствам

$$x^{\log_y z} = 2, \quad y^{\log_z x} = 4, \quad z^{\log_x y} = 8.$$

Найдите $(\log_x y)^2$.

Задача 23. У n -угольника, где $n > 3$, число диагоналей кратно 2025. Найдите наименьшее возможное n .

Задача 24. Для действительного t через $[t]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее t . Сколько корней имеет уравнение

$$[-(x - 2)^2] = 2x - 4?$$

Задача 25. Уравнение $x^4 - 56x + 15 = 0$ имеет комплексный корень вида $-a + i\sqrt{b}$, где a, b — положительные целые числа. Найдите $a + 10b$.

Задача 26. Для действительного числа x через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x , а через $\{x\} = x - [x]$ — его дробная часть. На экране записано число x . После нажатия кнопки оно заменяется на $x + \{x\}$. Сколько существует исходных чисел x , из которых число 10 можно получить не более чем за три нажатия?

Задача 27. Назовём тройку различных положительных целых чисел (a, b, c) лестницей, если a делит b , а b делит c . Сколько чисел вида p^k , не превосходящих 2026, где p — простое число, а k — положительное целое число, нельзя представить в виде суммы чисел некоторой лестницы?

Задача 28. Квадрат разбит на 3×3 одинаковые клетки. В каждой клетке проводят ровно одну из двух диагоналей. Сколькими способами можно выбрать диагонали так, чтобы по проведённым отрезкам существовал путь из левого нижнего угла большого квадрата в правый верхний?

Задача 29. Положительные целые числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$\text{НОД}(\text{НОК}(a, b), \text{НОК}(a, c), \text{НОК}(b, c)) = 2025.$$

Найдите наименьшее возможное значение $a + b + c$.

Задача 30. В математическом турнире у каждой команды есть одинаковый набор из 16 задач, пронумерованных от 1 до 16. В начале команда получает задачи 1, 2 и 3. Каждый раз, когда команда решает одну из находящихся у неё задач, если ещё остались невыданные задачи, вместо неё выдаётся задача с наименьшим номером среди ещё не выдававшихся этой команде. После турнира оказалось, что никакие две команды не решили в точности один и тот же набор задач. Какое наибольшее число команд могло участвовать?

Задача 31. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Каждый житель посещает ровно один из трёх кружков: шахматный, театральный или робототехнический. Каждому жителю задали три вопроса: посещает ли он шахматный, театральный и робототехнический кружки. На вопрос про шахматный кружок «да» ответили 40% жителей, про театральный — 50%, про робототехнический — 60%. На сколько число рыцарей, посещающих театральный кружок, отличается от числа лжецов, посещающих его?

Задача 32. Сколько целых чисел от 1 до 2025 включительно нельзя представить в виде

$$x([x] + \lceil x \rceil),$$

где x — положительное действительное число, $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x , а $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, не меньшее x ?