

Математическая игра «7 чудес». 7–8 классы.

Решения и ответы



Задача 1. В запись трёхзначного натурального числа между первой и второй цифрами вписали ноль. Получившееся четырёхзначное число оказалось на 2700 больше исходного. Какова первая цифра исходного числа?

Решение. Пусть первая цифра исходного числа равна a , а число, образованное двумя последними цифрами, равно b . Тогда исходное число равно $100a + b$, а после вставки нуля получится $1000a + b$. Их разность равна $900a$. Поэтому $900a = 2700$, откуда $a = 3$.

Ответ. 3.

Задача 2. Сумма трёх чисел равна 96. Первое число в 6 раз больше третьего, а третье на 40 меньше второго. Найдите модуль разности первого и второго чисел.

Решение. Пусть третье число равно x . Тогда первое равно $6x$, а второе — $x + 40$. Поэтому

$$6x + x + (x + 40) = 96,$$

откуда $8x = 56$ и $x = 7$. Первое число равно 42, второе — 47, поэтому модуль их разности равен 5.

Ответ. 5.

Задача 3. Найдите сумму всех натуральных чисел n , для которых $\left[\frac{n}{7}\right] = 5$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Решение. Равенство $[n/7] = 5$ означает, что

$$5 \leq \frac{n}{7} < 6,$$

то есть $35 \leq n < 42$. Следовательно, подходят числа 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41. Их сумма равна

$$\frac{7(35 + 41)}{2} = 266.$$

Ответ. 266.

Задача 4. Дети посетили дельфинарий. Катя запомнила, что там было ровно 7 то ли выдр, то ли тюленей; Юра — что там было ровно 6 то ли морских котиков, то ли тюленей; Игорь — что там было ровно 5 то ли выдр, то ли морских котиков; Серёжа — что меньше всего там было то ли тюленей, то ли выдр. Никто из них не ошибся. Сколько было выдр, тюленей и морских котиков?

Решение. Из воспоминаний первых трёх детей следует, что количества трёх видов равны 5, 6, 7 в некотором порядке. Серёжа говорит, что минимальное количество, то есть 5, относится к тюленям или выдрам, а Игорь — что 5 относится к выдрам или морским котикам. Значит, выдр было 5. Тогда по словам Кати тюленей было 7, а морских котиков — 6.

Ответ. 5, 7, 6.

Задача 5. Сколько положительных целых чисел меньше 10000 содержат в своей десятичной записи ровно две цифры 2 и ровно одну цифру 5?

Решение. Мысленно запишем каждое такое число четырьмя цифрами, при необходимости дописав слева ноль. Кроме двух цифр 2 и одной цифры 5 есть ровно одна оставшаяся цифра; она может быть любой из восьми цифр, отличных от 2 и 5, включая 0. Выберем место этой цифры — 4 способами, саму цифру — 8 способами, а затем место цифры 5 среди трёх оставшихся позиций — 3 способами. Получаем $4 \cdot 8 \cdot 3 = 96$. Если оставшаяся цифра — 0 и стоит первой, получается трёхзначное число; оно учитывается ровно один раз.

Ответ. 96.

Задача 6. Сколько натуральных чисел n удовлетворяют равенству $[\sqrt{n}] = 7$? Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Решение. Равенство $[\sqrt{n}] = 7$ означает, что $7 \leq \sqrt{n} < 8$. После возведения в квадрат получаем $49 \leq n < 64$. Значит, подходят все натуральные числа от 49 до 63 включительно, всего $63 - 49 + 1 = 15$.

Ответ. 15.

Задача 7. Катя каждый день ест на завтрак либо кашу, либо яичницу, либо сырники, но никогда не ест два дня подряд одно и то же. В течение двух недель она записывала свои завтраки. Оказалось, что сырники она ела в два раза чаще, чем кашу. Сколько раз за эти две недели Катя завтракала яичницей?

Решение. Пусть кашу Катя ела k раз. Тогда сырники она ела $2k$ раз, а яичницу — $14 - 3k$ раз. Так как одинаковые завтраки не идут два дня подряд, ни один вид завтрака не мог встретиться более 7 раз. Поэтому

$$2k \leq 7, \quad 14 - 3k \leq 7.$$

Отсюда $k \leq 3$ и $k \geq 3$, значит, $k = 3$. Тогда яичницу Катя ела $14 - 9 = 5$ раз. Такая последовательность возможна, например: сырники, яичница, сырники, яичница, сырники, каша, сырники, яичница, сырники, каша, яичница, сырники, каша, яичница.

Ответ. 5.

Задача 8. После матча Алексей сказал: «Первая команда забила 17 голов, а вторая — больше 14». Василий сказал: «Первая команда забила больше 18 голов, а вторая — не больше 14». Сергей сказал: «Первая команда забила меньше 20 голов, а вторая — ровно 14». Оказалось, что один из друзей ошибся в обоих утверждениях, а двое других оба раза сказали правду. Сколько голов забила каждая команда?

Решение. Утверждение Алексея о второй команде противоречит утверждениям и Василия, и Сергея. Поэтому Алексей не может быть одним из двух полностью правдивых друзей: ошибся именно он, а Василий и Сергей сказали правду. Тогда первая команда забила больше 18, но меньше 20 голов, то есть 19, а вторая — ровно 14.

Ответ. 19, 14.

Задача 9. A , B и C — три различные цифры, причём $A \neq 0$. Трёхзначные числа AAA , AAB и ACC в сумме дают 2026. Найдите число ABC .

Решение. Имеем

$$111A + (110A + B) + (100A + 11C) = 2026,$$

то есть $321A + B + 11C = 2026$. Поскольку $0 \leq B + 11C \leq 108$, получаем $1918 \leq 321A \leq 2026$, откуда $A = 6$. Тогда $B + 11C = 100$. Единственная возможность для цифр — $C = 9$ и $B = 1$. Проверка: $666 + 661 + 699 = 2026$. Следовательно, $ABC = 619$.

Ответ. 619.

Задача 10. Точка P лежит внутри прямоугольника $ABCD$. Известно, что $PA^2 = 5$, $PB^2 = 26$, $PC^2 = 41$. Найдите PD^2 .

Решение. Опустим из точки P перпендикуляры на стороны прямоугольника. Пусть расстояния от P до левой и правой сторон равны x и y , а до нижней и верхней сторон — u и v соответственно. Тогда по теореме Пифагора

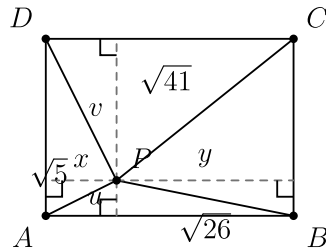
$$PA^2 = x^2 + u^2, \quad PB^2 = y^2 + u^2, \quad PC^2 = y^2 + v^2, \quad PD^2 = x^2 + v^2.$$

Складывая первое и третье равенства, а также второе и четвёртое, получаем

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2.$$

Значит,

$$PD^2 = PA^2 + PC^2 - PB^2 = 5 + 41 - 26 = 20.$$



Ответ. 20.

Задача 11. Среднее арифметическое трёх различных целых чисел равно 50, а разность наибольшего и наименьшего равна 14. Какое наименьшее значение может иметь наименьшее из этих чисел?

Решение. Пусть $a < b < c$. Тогда $a + b + c = 150$ и $c = a + 14$, поэтому $b = 136 - 2a$. Из $b < c$ получаем $136 - 2a < a + 14$, то есть $3a > 122$. Следовательно, $a \geq 41$. Значение 41 достигается: числа 41, 54, 55 различны, их среднее арифметическое равно 50, а разность наибольшего и наименьшего равна 14. Значит, искомый минимум равен 41.

Ответ. 41.

Задача 12. Лёша и Ира живут в одном одноподъездном доме. На каждом этаже по 9 квартир; квартиры пронумерованы подряд, начиная с 1 на первом этаже. Номер этажа Лёши равен номеру квартиры Иры, а сумма номеров их квартир равна 329. Каков номер квартиры Лёши?

Решение. Пусть k — номер квартиры Иры и одновременно номер этажа Лёши. На k -м этаже находятся квартиры с номерами от $9k - 8$ до $9k$. Поэтому

$$10k - 8 \leq 329 \leq 10k.$$

Единственное целое k , удовлетворяющее этим неравенствам, равно 33. Значит, номер квартиры Лёши равен $329 - 33 = 296$. Проверка: квартиры 33-го этажа имеют номера от 289 до 297, так что квартира 296 действительно находится на этом этаже.

Ответ. 296.

Задача 13. Арсений выписал три двузначных натуральных числа. В записи каждого из них используются одни и те же две цифры, а сумма трёх чисел равна 180. Сколько различных троек можно получить, если порядок чисел в тройке не учитывать?

Решение. Для фиксированной пары цифр можно составить не более двух двузначных чисел, поэтому хотя бы два из трёх выписанных чисел равны. Если равны все три, каждое из них равно $180 : 3 = 60$, и получаем тройку 60, 60, 60.

Пусть теперь равны ровно два числа. Обозначим их через $10a + b$; тогда третье число равно $10b + a$. Оба числа двузначные, поэтому a и b — ненулевые цифры. Из условия

$$2(10a + b) + (10b + a) = 180,$$

то есть $7a + 4b = 60$. По модулю 4 получаем $3a \equiv 0 \pmod{4}$, поэтому a делится на 4. Значит, $a = 4$ или $a = 8$. При $a = 4$ получаем $b = 8$, а при $a = 8$ — $b = 1$. Получаются ещё две тройки: 48, 48, 84 и 81, 81, 18. Итак, всего три тройки.

Ответ. 3.

Задача 14. Квадрат $ABCD$ имеет сторону 24. Точки E и F — середины сторон AB и CD соответственно. Найдите площадь общей части треугольников ABF и CDE .

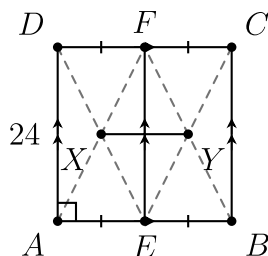
Решение. Обозначим $X = AF \cap DE$ и $Y = BF \cap CE$. Четырёхугольник $AEFD$ — прямоугольник: $AE \parallel DF$, $AE = DF = 12$, а $AD \perp AE$. Поэтому его диагонали AF и DE делятся точкой X пополам. Аналогично $EBCF$ — прямоугольник, поэтому Y — середина и BF , и CE .

В треугольнике ABF отрезок XY соединяет середины сторон AF и BF . Значит, XY — средняя линия этого треугольника, поэтому

$$XY = \frac{AB}{2} = 12, \quad XY \parallel AB.$$

Кроме того, $EF \parallel AD$, поэтому $EF \perp XY$, а $EF = AD = 24$. Общая часть треугольников ABF и CDE — четырёхугольник $EXFY$, диагонали которого равны EF и XY и перпендикулярны. Следовательно, его площадь равна

$$\frac{EF \cdot XY}{2} = \frac{24 \cdot 12}{2} = 144.$$



Ответ. 144.

Задача 15. В городе Буквинске два жителя знакомы тогда и только тогда, когда в их именах есть хотя бы одна общая буква. У нескольких жителей спросили, сколько у них знакомых в городе. Мартин ответил 20, Клим — 15, Инна — 12, Тамара — 12. Что ответила Камилла?

Решение. Все пятеро — Мартин, Клим, Инна, Тамара и Камилла — попарно знакомы, поэтому среди остальных жителей у Мартина 16 знакомых, у Клина 11, у Инны 8 и у Тамары 8.

Все буквы имени Инна встречаются в имени Мартин, поэтому каждый внешний знакомый Инны знаком и с Мартином. То же верно для Тамары. При этом буквы имени Мартин вместе покрываются буквами имён Инна и Тамара. Поэтому 16 внешних знакомых Мартина — объединение множеств внешних знакомых Инны и Тамары. Эти множества имеют по 8 человек, значит, не пересекаются.

Все буквы имени Клим встречаются в имени Камилла, поэтому каждый знакомый Клина знаком и с Камиллой. Если бы у Камиллы был внешний знакомый, не знакомый с Климом, общей с Камиллой буквой могла бы быть только «а». Но тогда он был бы знаком одновременно и с Инной, и с Тамарой, что невозможно. Следовательно, у Камиллы столько же знакомых, сколько у Клина, то есть 15.

Ответ. 15.

Задача 16. Прямоугольник 2×8 замощают плитками 1×2 и 2×2 ; плитки 1×2 разрешено поворачивать. Ровно две использованные плитки имеют размер 2×2 . Сколько существует замощений?

Решение. Просматривая замощение слева направо, оно единственным образом распадается на блоки трёх типов: одно вертикальное домино ширины 1; два горизонтальных домино, вместе занимающие блок 2×2 ; одна квадратная плитка 2×2 . Пусть блоков из двух горизонтальных домино h , а вертикальных домино v . Две квадратные плитки занимают ширину 4, поэтому

$$2h + v = 4.$$

Возможны $(h, v) = (0, 4), (1, 2), (2, 0)$. В первом случае среди шести блоков выбираем места для двух квадратов: $C_6^2 = 15$. Во втором случае место блока из двух горизонтальных домино выбирается 5 способами, а места двух квадратов среди оставшихся четырёх — C_4^2 способами, всего $5C_4^2 = 30$. В третьем случае выбираем места двух квадратов среди четырёх блоков: $C_4^2 = 6$. Итого $15 + 30 + 6 = 51$.

Ответ. 51.

Задача 17. Найдите наибольшее десятизначное число, в записи которого между любыми двумя одинаковыми цифрами есть хотя бы одна цифра, меньшая их.

Решение. Будем строить число слева направо, каждый раз выбирая наибольшую цифру, которая не нарушает условие уже в построенной части. Получаем последовательно

9, 8, 9, 7, 9, 8, 9, 6, 9, 8,

то есть число 9897989698.

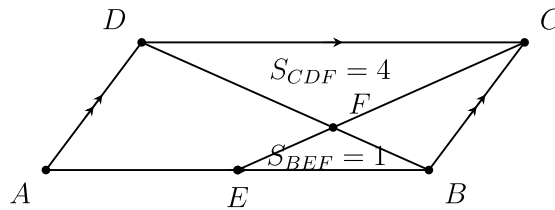
Например, после начала 989 нельзя поставить ни 9, ни 8: новая 9 стояла бы рядом с предыдущей 9, а между предыдущей 8 и новой 8 находилась бы только 9, которая не меньше 8; поэтому следующая цифра не больше 7. Далее тот же выбор повторяется. Если на каком-то шаге поставить цифру больше выбранной, условие уже нарушится для двух одинаковых цифр в построенном начале, и последующими цифрами это исправить невозможно. Следовательно, найденное число наибольшее.

Ответ. 9897989698.

Задача 18. В параллелограмме $ABCD$ точка E лежит на стороне AB . Отрезок CE пересекает диагональ BD в точке F . Известно, что площадь треугольника BEF равна 1, а площадь треугольника CDF равна 4. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Решение. Треугольники BEF и DCF подобны: $BE \parallel CD$, точки B, F, D лежат на одной прямой, а точки E, F, C — на одной прямой. Их площади относятся как $1 : 4$, поэтому коэффициент подобия равен $1 : 2$ и $BF : FD = 1 : 2$.

Треугольники BCF и DCF имеют общую высоту, опущенную из C на прямую BD , поэтому их площади относятся как $BF : FD = 1 : 2$. Так как площадь CDF равна 4, площадь BCF равна 2. Значит, площадь треугольника BCD равна 6. Диагональ BD делит параллелограмм на два равновеликих треугольника, поэтому площадь параллелограмма равна 12.



Ответ. 12.

Задача 19. Два непересекающихся множества S и T состоят из 15 различных положительных целых чисел каждое. Сумма чисел в каждом множестве равна k . Найдите наименьшее возможное k .

Решение. В объединении $S \cup T$ находятся 30 различных положительных целых чисел, поэтому их сумма не меньше

$$1 + 2 + \dots + 30 = 465.$$

Но эта сумма равна $2k$, значит, $2k \geq 465$ и $k \geq 233$.

Оценка достигается, например, для

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29\},$$

$$T = \{7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 31\}.$$

Оба множества содержат по 15 чисел, не пересекаются и имеют сумму 233. Следовательно, минимальное значение k равно 233.

Ответ. 233.

Задача 20. Бригада рабочих выполняет некоторую работу за 7 дней. Если из бригады убрать двух рабочих, то на ту же работу потребуется целое число дней; если убрать шестерых — тоже целое число дней. Все рабочие имеют одинаковую производительность. Сколько рабочих было в бригаде?

Решение. Пусть в бригаде n рабочих. Объём работы равен $7n$ человеко-дням. Поэтому $n - 2$ делит $7n$. Так как

$$7n = 7(n - 2) + 14,$$

число $n - 2$ делит 14. Поскольку $n > 6$, имеем $n - 2 > 4$, значит, $n - 2$ равно 7 или 14. Отсюда $n = 9$ или $n = 16$.

Кроме того, $n - 6$ должно делить $7n$, а значит, и

$$7n - 7(n - 6) = 42.$$

При $n = 9$ получаем $3 \mid 42$, а при $n = 16$ получаем $10 \nmid 42$. Следовательно, $n = 9$.

Ответ. 9.

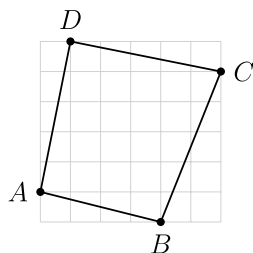
Задача 21. На координатной плоскости с квадратной единичной сеткой дан четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A(0; 1)$, $B(4; 0)$, $C(6; 5)$, $D(1; 6)$. Сколько узлов сетки лежит строго внутри четырёхугольника?

Решение. Четырёхугольник лежит внутри квадрата 6×6 . Его площадь равна 36 минус площади четырёх прямоугольных треугольников по углам квадрата: 2, 5, $5/2$ и $5/2$. Поэтому $S = 24$.

Векторы его сторон равны $(4, -1)$, $(2, 5)$, $(-5, 1)$, $(-1, -5)$; у каждой пары координат НОД равен 1. Значит, на каждой стороне нет узлов сетки, кроме концов, и всего на границе $B = 4$ узла. По формуле Пика

$$S = I + \frac{B}{2} - 1,$$

поэтому $I = 24 - 2 + 1 = 23$.



Ответ. 23.

Задача 22. Положительную дробь назовём удачной, если она равна некоторой дроби, числитель которой на 1 меньше знаменателя. Сколько удачных дробей можно записать со знаменателем 2026?

Решение. Пусть $a/2026$ — удачная дробь. Тогда для некоторого натурального $n > 1$

$$\frac{a}{2026} = \frac{n-1}{n}.$$

Отсюда $n(2026 - a) = 2026$, поэтому n должно быть делителем 2026. И наоборот, для каждого делителя $n > 1$ число

$$a = 2026 - \frac{2026}{n}$$

даёт подходящую положительную дробь. Так как $2026 = 2 \cdot 1013$, а 1013 — простое число, делители 2026 равны 1, 2, 1013, 2026. Исключаем 1 и получаем три удачные дроби.

Ответ. 3.

Задача 23. Квадрат некоторого натурального числа при делении на 12 даёт остаток, равный самому этому числу. Найдите все возможные значения этого числа.

Решение. Пусть число равно n . Так как остаток при делении на 12 равен n , имеем $1 \leq n \leq 11$ и

$$n^2 \equiv n \pmod{12},$$

то есть 12 делит $n(n-1)$. Числа n и $n-1$ взаимно просты. Поэтому для делимости произведения на 3 одно из них делится на 3, а для делимости на 4 одно из них делится на 4. Значит, $n \equiv 0$ или $1 \pmod{3}$ и одновременно $n \equiv 0$ или $1 \pmod{4}$. По модулю 12 получаются остатки 0, 1, 4, 9. Значение 0 не является положительным натуральным числом, поэтому подходят 1, 4, 9.

Ответ. 1, 4, 9.

Задача 24. Сколько положительных целых чисел n удовлетворяют равенству $\left[\frac{n}{6}\right] = \left[\frac{n}{8}\right]$?

Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Решение. Пусть обе целые части равны k . Тогда

$$6k \leq n < 6k + 6, \quad 8k \leq n < 8k + 8.$$

Эти промежутки могут пересекаться только при $8k < 6k + 6$, то есть $k < 3$. Поскольку $n > 0$, имеем $k \geq 0$.

При $k = 0$ подходят $n = 1, 2, 3, 4, 5$ — 5 чисел; при $k = 1$ подходят 8, 9, 10, 11 — 4 числа; при $k = 2$ подходят 16, 17 — 2 числа. Итого $5 + 4 + 2 = 11$.

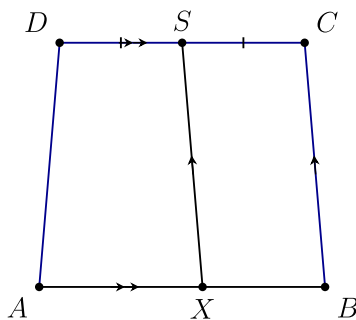
Ответ. 11.

Задача 25. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания — AB и CD , причём $BC = CD = AD$. Точка S — середина CD , а точка X лежит на AB и такова, что $XS \parallel BC$. Периметр трапеции $ABCD$ равен 50, а периметр четырёхугольника $AXSD$ равен 38. Найдите периметр параллелограмма $XBCS$.

Решение. Так как $XS \parallel BC$ и $XB \parallel CS$, четырёхугольник $XBCS$ — параллелограмм. Поэтому

$$XB = CS = \frac{CD}{2}, \quad XS = BC = CD.$$

Разность периметров $ABCD$ и $AXSD$ равна $XB + CS = CD$, поэтому $CD = 50 - 38 = 12$. Стороны параллелограмма $XBCS$ равны 12 и 6, следовательно, его периметр равен $2(12 + 6) = 36$.



Ответ. 36.

Задача 26. В ряд записаны семь положительных целых чисел a, b, c, d, e, f, g . Сумма любых трёх соседних чисел равна 35. Известно, что $b + f = 15$. Найдите сумму всех семи чисел.

Решение. Из равенств $a + b + c = b + c + d$, $b + c + d = c + d + e$ и так далее получаем $a = d = g$, $b = e$, $c = f$. Поэтому $b + f = b + c = 15$. Из $a + b + c = 35$ следует $a = 20$. Тогда сумма всех семи чисел равна

$$3a + 2b + 2c = 60 + 30 = 90.$$

Ответ. 90.

Задача 27. Положительные целые числа m и n удовлетворяют равенству $(m+n)(24mn+1)+3 = 2026$. Найдите $m + n + 12mn$.

Решение. Вычитая 3, получаем

$$(m+n)(24mn+1) = 2023 = 7 \cdot 17^2.$$

При положительных m, n выполнено $1 < m + n < 24mn + 1$. Поэтому меньший множитель $m + n$ может быть только 7 или 17.

Если $m + n = 17$, то $mn \geq 16$, следовательно, $24mn + 1 \geq 385$, хотя второй множитель должен быть равен $2023/17 = 119$; противоречие. Значит, $m + n = 7$ и $24mn + 1 = 289$, откуда $mn = 12$. Такие числа существуют: это 3 и 4. Поэтому

$$m + n + 12mn = 7 + 144 = 151.$$

Ответ. 151.

Задача 28. В семи коробках лежат конфеты. В каждой следующей коробке конфет либо в 2 раза больше, либо на 3 больше, чем в предыдущей. В первой коробке 1 конфета, а в последней — 35. Какое наибольшее количество конфет могло быть во всех семи коробках вместе?

Решение. Обозначим количества конфет в коробках через $x_1, \dots, x_7$. Так как $x_7 = 35$, то $x_6 = 32$: удвоением нечётное число 35 получить нельзя. Перед 32 могло стоять 16 или 29.

Если $x_5 = 29$, то, двигаясь назад, получаем $x_4 = 26$, затем $x_3 = 13$ или 23, а затем $x_2 = 10$ или 20. Но из $x_1 = 1$ за один ход можно получить только 2 или 4, поэтому $x_5 \neq 29$ и $x_5 = 16$.

Перед 16 могло стоять 8 или 13. Если $x_4 = 13$, то $x_3 = 10$, а $x_2 = 5$ или 7, что снова невозможно. Значит, $x_4 = 8$. Перед 8 могло стоять 4 или 5; в обоих случаях $x_2 = 2$. Получаем ровно две цепочки:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 35$$

и

$$1, 2, 5, 8, 16, 32, 35.$$

Их суммы равны 98 и 99. Следовательно, максимум равен 99.

Ответ. 99.

Задача 29. Четыре различных положительных целых числа имеют сумму 26. Сумма двух наименьших равна сумме двух наибольших, уменьшенной на 10. Какое наибольшее значение может иметь произведение двух наименьших чисел?

Решение. Пусть $a < b < c < d$. Тогда

$$a + b + c + d = 26, \quad a + b = c + d - 10.$$

Отсюда $a + b = 8$, $c + d = 18$. При положительных различных $a < b$ с суммой 8 возможны пары (1, 7), (2, 6), (3, 5), и их произведения равны соответственно 7, 12, 15. Наибольшее значение равно 15. Оно достигается, например, на числах 3, 5, 8, 10: они различны, имеют сумму 26 и удовлетворяют условию.

Ответ. 15.

Задача 30. Фишка стоит в левой нижней клетке таблицы 4×4 клеток и должна попасть в правую верхнюю клетку. За обычный ход она переходит в соседнюю по стороне клетку справа или сверху. Ровно один раз за весь путь вместо обычного хода она должна перейти по диагонали в клетку, касающуюся текущей только правым верхним углом. Сколько существует таких путей?

Решение. От левой нижней клетки до правой верхней нужно суммарно сдвинуться на три клетки вправо и на три клетки вверх. Диагональный ход даёт одновременно один сдвиг вправо и один вверх, поэтому кроме него должны быть сделаны два хода вправо и два хода вверх.

Положение диагонального хода можно выбрать 5 способами, а затем среди четырёх оставшихся мест выбрать два места для ходов вправо. Поэтому число путей равно

$$5C_4^2 = 30.$$

Все они допустимы, поскольку все ходы направлены только вправо и вверх.

Ответ. 30.

Задача 31. Положительные целые числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$a + \frac{1}{b + 1/c} = \frac{90}{11}.$$

Найдите a, b, c .

Решение. Поскольку b и c положительны,

$$0 < \frac{1}{b + 1/c} < 1.$$

Так как $8 < 90/11 < 9$, получаем $a = 8$. Тогда

$$\frac{1}{b + 1/c} = \frac{2}{11},$$

откуда

$$b + \frac{1}{c} = \frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}.$$

Поскольку b — положительное целое число и $0 < 1/c \leq 1$, получаем $b = 5$ и $c = 2$. Значит, $(a, b, c) = (8, 5, 2)$.

Ответ. 8, 5, 2.

Задача 32. Найдите сумму всех положительных целых чисел n , для которых

$$\left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{3} \right] + \left[\frac{n}{6} \right] = 2025.$$

Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Решение. Запишем $n = 6q + r$, где $0 \leq r \leq 5$. Тогда

$$\left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{3} \right] + \left[\frac{n}{6} \right] = 6q + \left[\frac{r}{2} \right] + \left[\frac{r}{3} \right].$$

Для $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ сумма $[r/2] + [r/3]$ равна соответственно 0, 0, 1, 2, 3, 3. Так как $2025 = 6 \cdot 337 + 3$, возможны только $r = 4$ и $r = 5$, причём $q = 337$. Получаем $n = 2026$ и $n = 2027$. Их сумма равна 4053.

Ответ. 4053.