

Математическая игра «7 чудес». 7–8 классы.



Задача 1. В запись трёхзначного натурального числа между первой и второй цифрами вписали ноль. Получившееся четырёхзначное число оказалось на 2700 больше исходного. Какова первая цифра исходного числа?

Задача 2. Сумма трёх чисел равна 96. Первое число в 6 раз больше третьего, а третье на 40 меньше второго. Найдите модуль разности первого и второго чисел.

Задача 3. Найдите сумму всех натуральных чисел n , для которых $\left[\frac{n}{7}\right] = 5$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Задача 4. Дети посетили дельфинарий. Катя запомнила, что там было ровно 7 то ли выдр, то ли тюленей; Юра — что там было ровно 6 то ли морских котиков, то ли тюленей; Игорь — что там было ровно 5 то ли выдр, то ли морских котиков; Серёжа — что меньше всего там было то ли тюленей, то ли выдр. Никто из них не ошибся. Сколько было выдр, тюленей и морских котиков?

Задача 5. Сколько положительных целых чисел меньше 10000 содержат в своей десятичной записи ровно две цифры 2 и ровно одну цифру 5?

Задача 6. Сколько натуральных чисел n удовлетворяют равенству $[\sqrt{n}] = 7$? Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Задача 7. Катя каждый день ест на завтрак либо кашу, либо яичницу, либо сырники, но никогда не ест два дня подряд одно и то же. В течение двух недель она записывала свои завтраки. Оказалось, что сырники она ела в два раза чаще, чем кашу. Сколько раз за эти две недели Катя завтракала яичницей?

Задача 8. После матча Алексей сказал: «Первая команда забила 17 голов, а вторая — больше 14». Василий сказал: «Первая команда забила больше 18 голов, а вторая — не больше 14». Сергей сказал: «Первая команда забила меньше 20 голов, а вторая — ровно 14». Оказалось, что один из друзей ошибся в обоих утверждениях, а двое других оба раза сказали правду. Сколько голов забила каждая команда?

Задача 9. A , B и C — три различные цифры, причём $A \neq 0$. Трёхзначные числа AAA , AAB и ACC в сумме дают 2026. Найдите число ABC .

Задача 10. Точка P лежит внутри прямоугольника $ABCD$. Известно, что $PA^2 = 5$, $PB^2 = 26$, $PC^2 = 41$. Найдите PD^2 .

Задача 11. Среднее арифметическое трёх различных целых чисел равно 50, а разность наибольшего и наименьшего равна 14. Какое наименьшее значение может иметь наименьшее из этих чисел?

Задача 12. Лёша и Ира живут в одном одноподъездном доме. На каждом этаже по 9 квартир; квартиры пронумерованы подряд, начиная с 1 на первом этаже. Номер этажа Лёши равен номеру квартиры Иры, а сумма номеров их квартир равна 329. Каков номер квартиры Лёши?

Задача 13. Арсений выписал три двузначных натуральных числа. В записи каждого из них используются одни и те же две цифры, а сумма трёх чисел равна 180. Сколько различных троек можно получить, если порядок чисел в тройке не учитывать?

Задача 14. Квадрат $ABCD$ имеет сторону 24. Точки E и F — середины сторон AB и CD соответственно. Найдите площадь общей части треугольников ABF и CDE .

Задача 15. В городе Буквинске два жителя знакомы тогда и только тогда, когда в их именах есть хотя бы одна общая буква. У нескольких жителей спросили, сколько у них знакомых в городе. Мартин ответил 20, Клим — 15, Инна — 12, Тамара — 12. Что ответила Камилла?

Задача 16. Прямоугольник 2×8 замощают плитками 1×2 и 2×2 ; плитки 1×2 разрешено поворачивать. Ровно две использованные плитки имеют размер 2×2 . Сколько существует замощений?

Задача 17. Найдите наибольшее десятизначное число, в записи которого между любыми двумя одинаковыми цифрами есть хотя бы одна цифра, меньшая их.

Задача 18. В параллелограмме $ABCD$ точка E лежит на стороне AB . Отрезок CE пересекает диагональ BD в точке F . Известно, что площадь треугольника BEF равна 1, а площадь треугольника CDF равна 4. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Задача 19. Два непересекающихся множества S и T состоят из 15 различных положительных целых чисел каждое. Сумма чисел в каждом множестве равна k . Найдите наименьшее возможное k .

Задача 20. Бригада рабочих выполняет некоторую работу за 7 дней. Если из бригады убрать двух рабочих, то на ту же работу потребуется целое число дней; если убрать шестерых — тоже целое число дней. Все рабочие имеют одинаковую производительность. Сколько рабочих было в бригаде?

Задача 21. На координатной плоскости с квадратной единичной сеткой дан четырёхугольник $ABCD$ с вершинами $A(0; 1)$, $B(4; 0)$, $C(6; 5)$, $D(1; 6)$. Сколько узлов сетки лежит строго внутри четырёхугольника?

Задача 22. Положительную дробь назовём удачной, если она равна некоторой дроби, числитель которой на 1 меньше знаменателя. Сколько удачных дробей можно записать со знаменателем 2026?

Задача 23. Квадрат некоторого натурального числа при делении на 12 даёт остаток, равный самому этому числу. Найдите все возможные значения этого числа.

Задача 24. Сколько положительных целых чисел n удовлетворяют равенству $\left[\frac{n}{6}\right] = \left[\frac{n}{8}\right]$? Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Задача 25. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания — AB и CD , причём $BC = CD = AD$. Точка S — середина CD , а точка X лежит на AB и такова, что $XS \parallel BC$. Периметр трапеции $ABCD$ равен 50, а периметр четырёхугольника $AXSD$ равен 38. Найдите периметр параллелограмма $XBCS$.

Задача 26. В ряд записаны семь положительных целых чисел a, b, c, d, e, f, g . Сумма любых трёх соседних чисел равна 35. Известно, что $b + f = 15$. Найдите сумму всех семи чисел.

Задача 27. Положительные целые числа m и n удовлетворяют равенству $(m+n)(24mn+1)+3 = 2026$. Найдите $m + n + 12mn$.

Задача 28. В семи коробках лежат конфеты. В каждой следующей коробке конфет либо в 2 раза больше, либо на 3 больше, чем в предыдущей. В первой коробке 1 конфета, а в последней — 35. Какое наибольшее количество конфет могло быть во всех семи коробках вместе?

Задача 29. Четыре различных положительных целых числа имеют сумму 26. Сумма двух наименьших равна сумме двух наибольших, уменьшенной на 10. Какое наибольшее значение может иметь произведение двух наименьших чисел?

Задача 30. Фишка стоит в левой нижней клетке таблицы 4×4 клеток и должна попасть в правую верхнюю клетку. За обычный ход она переходит в соседнюю по стороне клетку справа или сверху. Ровно один раз за весь путь вместо обычного хода она должна перейти по диагонали в клетку, касающуюся текущей только правым верхним углом. Сколько существует таких путей?

Задача 31. Положительные целые числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$a + \frac{1}{b + 1/c} = \frac{90}{11}.$$

Найдите a, b, c .

Задача 32. Найдите сумму всех положительных целых чисел n , для которых

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{6}\right] = 2025.$$

Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .