

Математическая игра «7 чудес». 9 класс.

Решения и ответы

Задача 1. Найдите натуральное число n , если $[n/4] + [(n+1)/4] + [(n+2)/4] + [(n+3)/4] = 2026$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Решение. Запишем $n = 4q + r$, где $0 \leq r < 4$. Среди четырёх чисел $n, n+1, n+2, n+3$ после деления на 4 ровно r целых частей равны $q+1$, а остальные $4-r$ равны q . Поэтому

$$[n/4] + [(n+1)/4] + [(n+2)/4] + [(n+3)/4] = (4-r)q + r(q+1) = 4q + r = n.$$

Значит, $n = 2026$.

Ответ. 2026.

Задача 2. На координатной плоскости даны точки $A(0; a)$, $B(2; -1)$, $C(3; 2)$, $D(0; -1)$ и $O(0; 0)$, где $a > 0$. Площади треугольников ABD и COB равны. Найдите a .

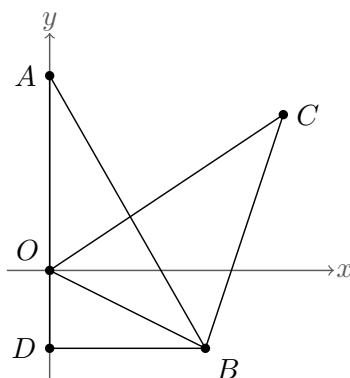
Решение. Отрезок AD имеет длину $a+1$, а расстояние от B до прямой AD равно 2. Поэтому

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}(a+1) \cdot 2 = a+1.$$

Площадь треугольника COB найдём по координатам:

$$S_{COB} = \frac{1}{2} |3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2| = \frac{7}{2}.$$

Следовательно, $a+1 = \frac{7}{2}$, откуда $a = \frac{5}{2} = 2,5$.



Ответ. 2,5.

Задача 3. Два игрока стоят на расстоянии 1500 см друг от друга и перебрасывают мяч. После каждого пойманного мяча расстояние между игроками увеличивается на 120 см, а после каждого непопавшего — уменьшается на 20 см. После некоторого числа бросков расстояние стало равно 1720 см. Сколько различных значений может принимать общее число бросков, если оно не превосходит 100?

Решение. Пусть было s пойманных и m непопавших мячей. Тогда

$$120s - 20m = 220,$$

то есть $m = 6s - 11$. Общее число бросков равно $s + m = 7s - 11$. Из $m \geq 0$ получаем $s \geq 2$, а из $7s - 11 \leq 100$ получаем $s \leq 15$. Таким образом, возможны все целые s от 2 до 15, всего 14 значений. Каждое из них действительно реализуется, например, если сначала сделать все пойманные броски, а затем все непопавшие.

Ответ. 14.

Задача 4. Дано трёхзначное число, ни одна из цифр которого не равна нулю. Его цифры переставили в порядке убывания и получили новое трёхзначное число. Оказалось, что исходное число на 135 больше полученного. Найдите все возможные исходные числа.

Решение. Пусть после упорядочивания получились цифры $a \leq b \leq c$. Обозначим $u = b - a$ и $v = c - b$. Рассмотрим пять нетривиальных перестановок цифр. Их разности с числом abc равны соответственно

$$9v, \quad 90u, \quad 9(11u + v), \quad 9(10u + 11v), \quad 99(u + v).$$



Нужно получить $135 = 9 \cdot 15$. Первое, второе, четвёртое и пятое выражения дать 135 не могут. Для перестановки bca получаем

$$11u + v = 15.$$

Так как $u, v \geq 0$ и это разности цифр, единственная возможность — $u = 1, v = 4$. Значит, $b = a + 1, c = a + 5$. Из $1 \leq a$ и $c \leq 9$ следует $a = 1, 2, 3, 4$. Исходное число имеет вид bca , поэтому получаем 261, 372, 483, 594.

Ответ. 261, 372, 483, 594.

Задача 5. Последовательность состоит из положительных целых чисел. Второй её член больше первого, а каждый член начиная с третьего равен сумме двух предыдущих. Известно, что шестой член равен 104. Найдите все возможные пары из первого и второго членов. Для каждой подходящей пары запишите подряд первый и второй члены; в ответе укажите оба получившихся числа.

Решение. Пусть первые два члена равны $a < b$. Тогда шестой член равен $3a + 5b$, поэтому

$$3a + 5b = 104.$$

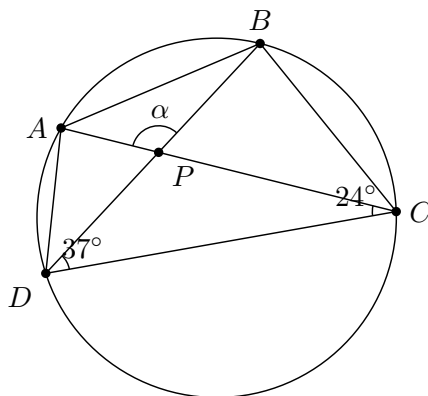
По модулю 5 получаем $a \equiv 3 \pmod{5}$. Кроме того, из $b > a$ следует $104 = 3a + 5b > 8a$, то есть $a < 13$. Значит, $a = 3$ или $a = 8$. В этих случаях соответственно $b = 19$ и $b = 16$. Обе пары подходят.

Ответ. 319, 816.

Задача 6. Точки A, B, C, D лежат на окружности в указанном порядке. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P . Известно, что $\angle BDC = 37^\circ, \angle ACD = 24^\circ$. Найдите $\angle APB$.

Решение. Вписанные углы BAC и BDC опираются на одну хорду BC , поэтому $\angle BAP = 37^\circ$. Аналогично $\angle ABP = \angle ABD = \angle ACD = 24^\circ$. В треугольнике ABP

$$\angle APB = 180^\circ - 37^\circ - 24^\circ = 119^\circ.$$



Ответ. 119° .

Задача 7. На шести гранях честного кубика написаны числа 1, 2, 2, 4, 7, 8. Кубик бросают. Если выпавшее число нечётно, все нечётные числа на гранях удваивают; если выпавшее число чётно, все чётные числа на гранях делят на 2. После этого кубик бросают ещё раз. Найдите вероятность того, что во второй раз выпадет число 2.

Решение. Нечётное число в первый раз выпадает с вероятностью $2/6 = 1/3$. Тогда числа на гранях становятся 2, 2, 2, 4, 14, 8, и вероятность получить 2 во втором броске равна $1/2$. Чётное число в первый раз выпадает с вероятностью $4/6 = 2/3$. Тогда на гранях будут 1, 1, 1, 2, 7, 4, и вероятность получить 2 равна $1/6$. Поэтому

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}.$$

Следовательно, искомая вероятность равна $5/18$.

Ответ. $5/18$.

Задача 8. Найдите все натуральные числа n , для которых $[(n+2)/5] + [(n+4)/5] = 20$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Решение. Пусть $n = 5q + r$, где $0 \leq r \leq 4$. Тогда левая часть равна

$$2q + [(r+2)/5] + [(r+4)/5].$$

При $r = 0, 1, 2, 3, 4$ добавка равна соответственно $0, 1, 1, 2, 2$. Поэтому равенство 20 возможно только при $(q, r) = (10, 0), (9, 3), (9, 4)$. Получаем $n = 50, 48, 49$.

Ответ. 48, 49, 50.

Задача 9. Найдите все натуральные числа n , для которых $n + 7$ делит $n^2 + 3n + 50$.

Решение. Имеем

$$n^2 + 3n + 50 = (n + 7)(n - 4) + 78.$$

Следовательно, $n + 7$ должно быть положительным делителем числа 78. Так как n натурально, $n + 7 \geq 8$. Подходящие делители: 13, 26, 39, 78. Поэтому $n = 6, 19, 32, 71$. Все четыре числа действительно подходят.

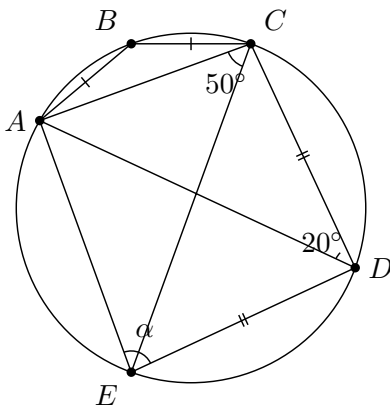
Ответ. 6, 19, 32, 71.

Задача 10. Точки A, B, C, D, E лежат на окружности в указанном порядке. Известно, что $AB = BC$, $CD = DE$, $\angle BDA = 20^\circ$, $\angle ACE = 50^\circ$. Найдите $\angle AED$.

Решение. Угол BDA опирается на дугу BA , поэтому эта дуга равна 40° . Так как $AB = BC$, дуга BC также равна 40° . Угол $ACE = 50^\circ$ опирается на дугу AE , не содержащую C , поэтому эта дуга равна 100° . Пусть равные дуги CD и DE имеют величину x . Тогда

$$40^\circ + 40^\circ + x + x + 100^\circ = 360^\circ,$$

откуда $x = 90^\circ$. Дуга $ABCD$ равна $40^\circ + 40^\circ + 90^\circ = 170^\circ$, поэтому $\angle AED = 85^\circ$.



Ответ. 85° .

Задача 11. Последовательность задана условиями $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = a_n^2 + 100$. Найдите остаток от деления a_{2026} на 10000.

Решение. Докажем по индукции, что

$$a_n \equiv 1 + 100(2^{n-1} - 1) \pmod{10000}.$$

Для $n = 1$ это верно. Если $a_n \equiv 1 + 100t$, то

$$a_{n+1} = a_n^2 + 100 \equiv 1 + 200t + 100 = 1 + 100(2t + 1) \pmod{10000},$$

что даёт переход. Теперь нужно найти 2^{2025} по модулю 100. По модулю 4 это число равно 0. По теореме Эйлера $2^{20} \equiv 1 \pmod{25}$, поэтому

$$2^{2025} \equiv 2^5 \equiv 7 \pmod{25}.$$

Единственный остаток по модулю 100, кратный 4 и сравнимый с 7 по модулю 25, равен 32. Следовательно,

$$a_{2026} \equiv 1 + 100 \cdot 31 = 3101 \pmod{10000}.$$

Ответ. 3101.

Задача 12. Каждую вершину данного куба окрашивают в чёрный или белый цвет. На каждой грани должно оказаться ровно две чёрные вершины. Сколько существует раскрасок? Раскраски, отличающиеся цветом хотя бы одной вершины, считаются разными; повороты куба не отождествляются.

Решение. Посчитаем сначала число чёрных вершин. На шести гранях всего $6 \cdot 2 = 12$ появлений чёрных вершин, а каждая чёрная вершина принадлежит трём граням. Значит, чёрных вершин ровно $12/3 = 4$.

Разобьём вершины куба на четыре пары противоположных. Если среди чёрных есть противоположная пара, то на каждой грани уже лежит ровно одна вершина этой пары. Поэтому две оставшиеся

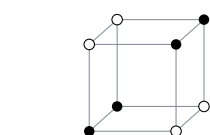
чёрные вершины также должны быть противоположными. Можно выбрать любые две из четырёх пар: $C_4^2 = 6$ раскрасок.

Остаётся случай, когда противоположных чёрных вершин нет. Тогда из каждой противоположной пары выбрана ровно одна вершина. Выберем одну чёрную вершину и обозначим её $(0, 0, 0)$. Из трёх остальных пар противоположных вершин надо выбрать ещё по одной вершине. В каждой такой паре у одного варианта ровно одна координата равна 1, а у другого — две. На каждой паре противоположных граней должно оказаться по две чёрные вершины, поэтому среди трёх выбранных вершин суммарно должно быть шесть единиц в координатах. Значит, каждый раз выбирается вариант с двумя единицами, и три остальные чёрные вершины равны

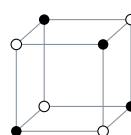
$$(0, 1, 1), \quad (1, 0, 1), \quad (1, 1, 0).$$

Получается одна раскраска. Если $(0, 0, 0)$ белая, получаем дополнительную, противоположную ей раскраску. Итого ещё 2 раскраски.

Всего $6 + 2 = 8$.



две противоположные
пары



противоположных чёрных
вершин нет

Ответ. 8.

Задача 13. Для каждого $k = 1, 2, \dots, 20$ на координатной плоскости проведена прямая $y = kx + k^2$. Сколько различных точек пересечения пар этих прямых имеют абсциссу, кратную 3?

Решение. Прямые с номерами k и l , где $k < l$, пересекаются при

$$kx + k^2 = lx + l^2,$$

откуда $x = -(k + l)$. Поэтому требуется, чтобы $k + l$ делилось на 3. Среди чисел от 1 до 20 шесть имеют остаток 0 по модулю 3, а по семь — остатки 1 и 2. Подходят пары двух чисел с остатком 0 и пары с остатками 1 и 2:

$$C_6^2 + 7 \cdot 7 = 15 + 49 = 64.$$

Разные пары дают разные точки: ордината точки пересечения равна $-kl$, так что по сумме $k + l$ и произведению kl неупорядоченная пара $\{k, l\}$ определяется однозначно.

Ответ. 64.

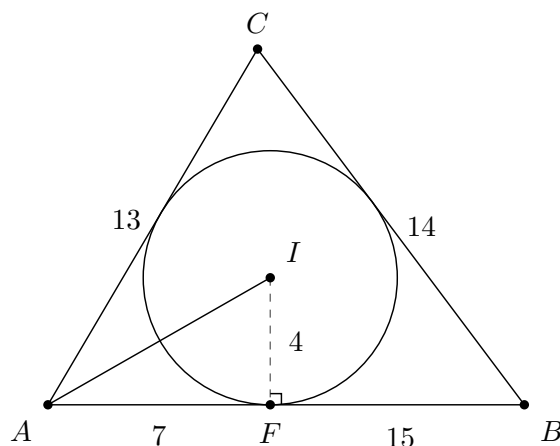
Задача 14. Стороны треугольника ABC равны $BC = 14$, $CA = 13$, $AB = 15$. Точка I — центр его вписанной окружности. Найдите AI^2 .

Решение. Полупериметр треугольника равен 21, а по формуле Герона его площадь

$$S = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6} = 84.$$

Значит, радиус вписанной окружности равен $r = S/21 = 4$. Пусть окружность касается стороны AB в точке F . Тогда $AF = s - BC = 21 - 14 = 7$, а $IF \perp AB$. Поэтому

$$AI^2 = AF^2 + IF^2 = 7^2 + 4^2 = 65.$$



Ответ. 65.

Задача 15. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 24$ с целыми коэффициентами a и b имеет три различных положительных целых корня. Найдите сумму всех возможных значений $|a|$.

Решение. Пусть корни равны r, s, t . По теореме Виета $rst = 24$, а $a = -(r + s + t)$. Разложения 24 на произведение трёх различных положительных целых множителей, без учёта порядка, таковы:

$$1 \cdot 2 \cdot 12, \quad 1 \cdot 3 \cdot 8, \quad 1 \cdot 4 \cdot 6, \quad 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

Соответствующие значения $|a|$ равны 15, 12, 11, 9. Их сумма равна 47.

Ответ. 47.

Задача 16. Прямоугольник 2×10 замощают плитками 1×2 и 2×2 ; плитки 1×2 разрешено поворачивать. Ровно три использованные плитки имеют размер 2×2 , причём никакие две такие плитки не имеют общей стороны. Сколько существует замощений?

Решение. Просматривая замощение слева направо, оно единственным образом разбивается на блоки трёх типов: одно вертикальное домино ширины 1, два горизонтальных домино, образующие блок 2×2 , и одна квадратная плитка 2×2 . Пусть блоков из двух горизонтальных домино h , а вертикальных домино v . Три квадрата занимают ширину 6, поэтому

$$2h + v = 4.$$

Возможны $(h, v) = (0, 4), (1, 2), (2, 0)$.

В первом случае четыре неквадратных блока создают пять промежутков; выбираем три из них для квадратов: $C_5^3 = 10$. Во втором случае блоки H, V, V можно расположить тремя способами, а затем выбрать три из четырёх промежутков: $3 \cdot C_4^3 = 12$. В третьем случае имеется ровно три промежутка, и все они заняты квадратами: 1 способ. Итого $10 + 12 + 1 = 23$.

Ответ. 23.

Задача 17. Найдите наименьшее натуральное число n , для которого $[n/6] - [n/10] = 7$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Решение. Запишем $n = 30q + r$, где $0 \leq r < 30$. Тогда

$$[n/6] - [n/10] = 2q + [r/6] - [r/10].$$

При $0 \leq r < 30$ имеем $[r/6] \leq 4$ и $[r/10] \geq 0$; непосредственная проверка промежутков $0 \leq r < 10$, $10 \leq r < 20$, $20 \leq r < 30$ показывает, что разность $[r/6] - [r/10]$ не превосходит 2. Поэтому при $n < 90$, то есть $q \leq 2$, всё выражение не превосходит 6. Для $90 \leq n \leq 95$ имеем $[n/6] - [n/10] = 15 - 9 = 6$. При $n = 96$ получаем $16 - 9 = 7$. Следовательно, наименьшее подходящее число — 96.

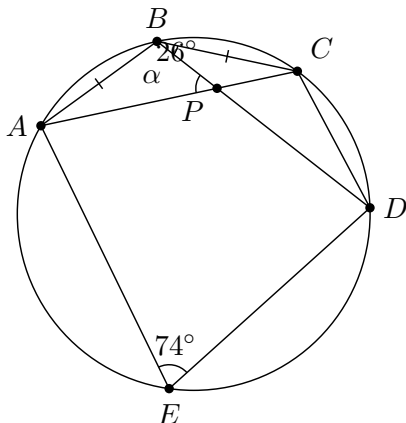
Ответ. 96.

Задача 18. Точки A, B, C, D, E лежат на окружности в указанном порядке, причём $AB = BC$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P . Известно, что $\angle AED = 74^\circ$, $\angle CBD = 26^\circ$. Найдите $\angle APB$.

Решение. Угол $AED = 74^\circ$ опирается на дугу $ABCD$, поэтому эта дуга равна 148° . Угол $CBD = 26^\circ$ опирается на дугу CD , значит, дуга CD равна 52° . Следовательно, сумма дуг AB и BC равна 96° . Так как $AB = BC$, каждая из них равна 48° .

Поэтому $\angle BAP = \angle BAC = 24^\circ$. Другая дуга AD , не содержащая B , равна $360^\circ - 148^\circ = 212^\circ$, откуда $\angle ABP = \angle ABD = 106^\circ$. Тогда

$$\angle APB = 180^\circ - 24^\circ - 106^\circ = 50^\circ.$$



Ответ. 50° .

Задача 19. Рост девяти игроков баскетбольной команды, в сантиметрах, равен 180, 181, 183, 187, 188, 190, 193, 195 и 196. Рост десятого игрока — целое число сантиметров. Сначала его записали неверно. После исправления ошибки и среднее арифметическое, и медиана десяти значений увеличились на 0,5 см. Медианой десяти чисел называется среднее арифметическое пятого и шестого чисел после расположения всех десяти чисел в порядке неубывания. Найдите все возможные правильные значения роста десятого игрока.

Решение. Пусть ошибочно записанный рост равен r , а правильный — R . Среднее десяти чисел увеличилось на 0,5, значит, их сумма увеличилась на 5, то есть

$$R = r + 5.$$

Обозначим через $M(x)$ медиану десяти ростов, если десятый рост равен x . По расположению девяти данных чисел получаем:

$$M(x) = \begin{cases} 187,5, & x \leq 187, \\ 188, & x = 188, \\ 188,5, & x = 189, \\ 189, & x \geq 190. \end{cases}$$

Нужно, чтобы $M(r+5) - M(r) = 0,5$. Это происходит только при $r = 183$ и $r = 189$. Поэтому правильный рост R равен соответственно 188 или 194.

Ответ. 188, 194.

Задача 20. У нескольких простых многоугольников выписали все их внутренние углы. Получился список из девяти углов: 30° , 50° , 60° , 70° , 90° , 100° , 120° , 160° и x° . Найдите x .

Решение. Пусть углы выписаны из t многоугольников. Всего у них девять вершин. Сумма внутренних углов всех многоугольников равна

$$180^\circ(9 - 2t),$$

то есть по модулю 360° сравнима с 180° . Сумма восьми известных углов равна 680° . Поэтому

$$680^\circ + x \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ},$$

откуда $x \equiv 220^\circ \pmod{360^\circ}$. Внутренний угол простого многоугольника лежит между 0° и 360° , поэтому $x = 220^\circ$.

Ответ. 220° .

Задача 21. Даны три различных положительных целых числа $a < b < c$. Каждое из них делит сумму двух остальных. Найдите отношения b/a и c/a . В ответе запишите подряд сначала b/a , затем c/a .

Решение. Так как c делит $a + b$ и $0 < a + b < 2c$, имеем $a + b = c$. Далее b делит $a + c = 2a + b$, значит, b делит $2a$. Поскольку $a < b$, выполнено $0 < 2a < 2b$, поэтому $2a = b$. Тогда $c = a + b = 3a$. Следовательно,

$$\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right) = (2, 3).$$

Такие тройки существуют: $(a, b, c) = (k, 2k, 3k)$ при любом натуральном k .

Ответ. 23.

Задача 22. В треугольнике ABC известно, что $AB = 12$, $BC = 13$, $AC = 15$. Точка M лежит на стороне AC . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM и BCM , равны. Найдите отношение AM/CM .

Решение. Пусть $AM = x$, $BM = y$, тогда $CM = 15 - x$. Обозначим высоту треугольника ABC , опущенную из B на AC , через h . Площади треугольников ABM и BCM равны соответственно $hx/2$ и $h(15 - x)/2$. Поэтому радиусы их вписанных окружностей равны

$$\frac{hx}{12 + x + y} \quad \text{и} \quad \frac{h(15 - x)}{13 + (15 - x) + y}.$$

По условию эти радиусы равны, следовательно,

$$\frac{x}{12 + x + y} = \frac{15 - x}{28 - x + y},$$

откуда

$$(2x - 15)y = 180 - 25x. \quad (1)$$

По теореме Стюарта для отрезка BM

$$13^2x + 12^2(15 - x) = 15(y^2 + x(15 - x)),$$

то есть

$$y^2 = \frac{3x^2 - 40x + 432}{3}. \quad (2)$$

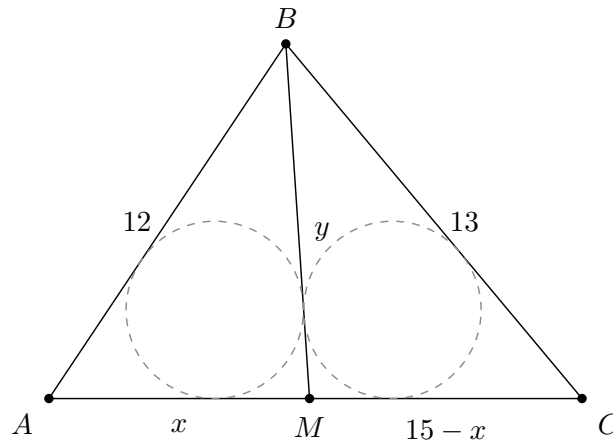
Возведём равенство (1) в квадрат и подставим (2). После сокращения получаем

$$x(15 - x)(x - 6)(3x - 22) = 0.$$

Проверим полученные корни в исходном равенстве (1). Так как M лежит на стороне AC и оба треугольника невырождены, $0 < x < 15$. При $x = 6$ равенство (1) даёт $y = -10$, что невозможно. При $x = \frac{22}{3}$ из (1) получаем $y = 10$; это значение удовлетворяет и (2). Поэтому

$$AM = x = \frac{22}{3}, \quad CM = 15 - x = \frac{23}{3}.$$

Следовательно, $AM/CM = 22/23$.



Ответ. $22/23$.

Задача 23. Положительные целые числа a, b, c, d удовлетворяют равенствам $ab + cd = 13$ и $ac + bd = 11$. Найдите наименьшее возможное значение $a + b + c + d$.

Решение. Складывая равенства, получаем

$$(a + d)(b + c) = 24.$$

Искомая сумма равна $(a + d) + (b + c)$. Среди разложений 24 на два положительных множителя наименьшую сумму 10 даёт пара 4 и 6. Вычитая исходные равенства, получаем

$$(a - d)(b - c) = 2.$$

Если бы $a + d$ и $b + c$ были равны 4 и 6, то обе разности $a - d$ и $b - c$ были бы чётными, а их произведение делилось бы на 4, что невозможно. Следующая возможная сумма множителей 24 равна $3 + 8 = 11$. Она достигается, например, при $(a, b, c, d) = (2, 5, 3, 1)$. Поэтому минимум равен 11.

Ответ. 11.

Задача 24. Найдите наименьшее натуральное число n , для которого $[n^2/(n + 4)] = n - 4$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Решение. Разделим n^2 на $n + 4$:

$$n^2 = (n + 4)(n - 4) + 16.$$

Поэтому

$$[n^2/(n + 4)] = n - 4 + [16/(n + 4)].$$

Равенство выполняется тогда и только тогда, когда $[16/(n+4)] = 0$, то есть $16 < n+4$. Следовательно, $n > 12$, и наименьшее подходящее число равно 13.

Ответ. 13.

Задача 25. Строка состоит из 2026 букв, каждая из которых — А или Б. Палиндромом называется строка, которая одинаково читается слева направо и справа налево. Каково наибольшее целое число k , для которого в любой такой строке обязательно найдётся палиндром длины не меньше k , состоящий из подряд идущих букв?

Решение. Сначала покажем, что палиндром длины хотя бы 4 обязательно существует. Достаточно рассмотреть первые девять букв. Предположим, что среди них нет палиндромов длины 4 и 5. Первые четыре буквы сами не образуют палиндром. С точностью до замены А на Б и чтения слова в обратном направлении возможны четыре случая: АААБ, ААБА, ААББ и АБАБ. Если продолжать слово, каждый раз запрещая палиндромы длины 4 и 5, получаем соответственно цепочки

$$\begin{aligned} \text{АААБ} &\rightarrow \text{АААБА} \rightarrow \text{АААБАБ} \rightarrow \text{АААБАББ} \rightarrow \text{АААБАБББ}, \\ \text{ААБА} &\rightarrow \text{ААБАБ} \rightarrow \text{ААБАББ} \rightarrow \text{ААБАБББ}, \\ \text{ААББ} &\rightarrow \text{ААБББ}, \quad \text{АБАБ} \rightarrow \text{АБАББ} \rightarrow \text{АБАБББ}. \end{aligned}$$

У слова АААБ есть ещё ветвь АААББ, но она продолжается только до АААБББ. Ни одно из получившихся слов длины 8 нельзя продолжить без палиндрома длины 4 или 5. Значит, слово длины 9 без такого палиндрома невозможно.

Покажем, что длину 5 гарантировать нельзя. Возьмём бесконечную периодическую строку

$$\text{ААБАБББААБАБББААБАББ} \dots$$

и оставим первые 2026 букв. Непосредственно проверяется, что ни один блок длины 5 или 6 в этой периодической строке не является палиндромом. Но любой палиндром длины не меньше 7 содержит внутри палиндром длины на 2 меньше; повторяя это, получили бы палиндром длины 5 или 6. Следовательно, палиндромов длины 5 и более в построенной строке нет. Поэтому наибольшее гарантированное k равно 4.

Ответ. 4.

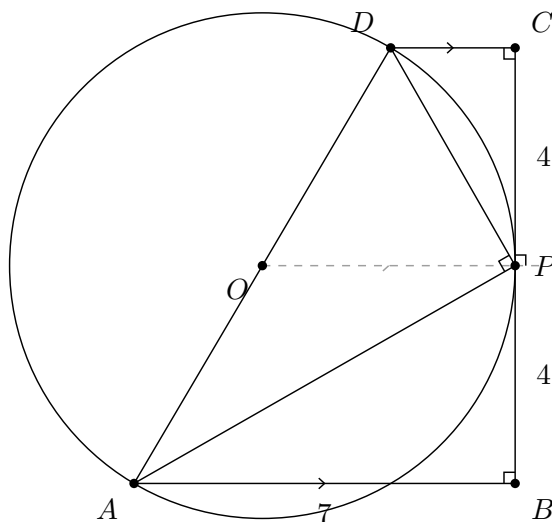
Задача 26. $ABCD$ — трапеция с основаниями AB и CD , причём $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$. Окружность с диаметром AD касается стороны BC . Известно, что $AB = 7$, $BC = 8$. Найдите длину CD .

Решение. Пусть O — середина AD , а P — точка касания окружности со стороной BC . Радиус OP перпендикулярен BC , поэтому $OP \parallel AB \parallel CD$. Прямая через середину боковой стороны трапеции, параллельная основаниям, проходит через середину другой боковой стороны; следовательно, $BP = PC = 4$.

Так как AD — диаметр окружности, $\angle APD = 90^\circ$. Треугольники ABP и PCD прямоугольные, а $\angle BAP = \angle DPC$, поскольку стороны этих углов попарно перпендикулярны. Значит, треугольники подобны. Поэтому

$$\frac{AB}{BP} = \frac{PC}{CD}, \quad \frac{7}{4} = \frac{4}{CD}.$$

Отсюда $CD = 16/7$.



Ответ. 16/7.

Задача 27. Для попарно различных положительных целых чисел p, q, r четыре числа $2r - 21$, $3r - 1$, $r + 12$ и $3r - 17$ в некотором порядке совпадают с числами $p, 2p, q, 2q$. Найдите все возможные значения r .

Решение. Сумма четырёх данных выражений равна $9r - 27$, а сумма $p + 2p + q + 2q$ равна $3(p + q)$. Поэтому

$$p + q = 3r - 9.$$

Из четырёх выражений нужно выбрать два, равные p и q , и их сумма должна быть $3r - 9$. Проверим шесть пар. Для пяти пар соответствующее равенство даёт $r = 13/2, 29/2, -20, 3, -4$; при $r = 3$ некоторые выражения отрицательны. Единственная допустимая возможность —

$$p, q \in \{2r - 21, r + 12\},$$

поскольку их сумма тождественно равна $3r - 9$.

Оставшиеся числа $3r - 1$ и $3r - 17$ должны быть удвоениями первых двух. Если $2(2r - 21) = 3r - 1$, то $r = 41$; если $2(2r - 21) = 3r - 17$, то $r = 25$. В обоих случаях оставшееся равенство также выполняется, и числа p, q, r попарно различны.

Ответ. 25, 41.

Задача 28. Каждую клетку таблицы 2×4 раскрашивают в один из четырёх цветов. Соседние по стороне клетки должны иметь разные цвета, причём каждый из четырёх цветов должен быть использован хотя бы один раз. Сколько существует таких раскрасок?

Решение. Сначала посчитаем правильные раскраски, если доступно q цветов, не требуя использовать все. Первый столбец можно раскрасить $q(q - 1)$ способами. Пусть в некотором столбце стоят разные цвета a, b . В следующем столбце верхний цвет можно выбрать так: если он равен b , для нижнего есть $q - 1$ вариантов; если он отличен и от a , и от b , верхний цвет выбирается $q - 2$ способами, а нижний — $q - 2$ способами. Итого для каждого следующего столбца

$$(q - 1) + (q - 2)^2 = q^2 - 3q + 3$$

вариантов.

Для четырёх цветов получаем $4 \cdot 3 \cdot 7^3 = 4116$ раскрасок. Исключим те, где использованы не все цвета. Если один заданный цвет отсутствует, остаётся $3 \cdot 2 \cdot 3^3 = 162$ раскраски; если отсутствуют два заданных цвета, остаются две шахматные раскраски. По принципу включений и исключений

$$4116 - 4 \cdot 162 + C_4^2 \cdot 2 = 3480.$$



пример допустимой раскраски

Ответ. 3480.

Задача 29. По кругу расположены 12 ламп, каждая из которых может быть включена или выключена. Сначала все лампы выключены. За один ход выбирают три подряд идущие по кругу лампы и меняют состояние каждой из них. Сколько различных состояний ламп можно получить?

Решение. Для каждого из 12 возможных ходов важно только, сделан он чётное или нечётное число раз. Поэтому имеется 2^{12} наборов ходов по модулю 2. Два набора дают одно состояние тогда и только тогда, когда их симметрическая разность ничего не меняет.

Пусть $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ показывает, входит ли ход, начинающийся с i -й лампы, в такую нулевую комбинацию. Каждая лампа должна переключиться чётное число раз, поэтому

$$\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_{i-2} \equiv 0 \pmod{2}.$$

По первым двум значениям вся последовательность определяется и имеет вид

$$a, b, a + b, a, b, a + b, \dots$$

по модулю 2. Так как 12 делится на 3, подходят все четыре пары (a, b) . Значит, каждое достижимое состояние получается ровно из четырёх наборов ходов, и число состояний равно

$$\frac{2^{12}}{4} = 1024.$$

Ответ. 1024.

Задача 30. Треугольник ABC , в котором $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 3$, вписан в окружность ω . Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D , а окружность ω второй раз — в точке E . Окружность с диаметром DE второй раз пересекает ω в точке F . Найдите AF^2 .

Решение. По теореме косинусов

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{25 + 9 - 49}{30} = -\frac{1}{2},$$

поэтому $\angle A = 120^\circ$. Введём координаты так, чтобы $A = (0, 0)$, а биссектриса угла A была положительной полуосью Ox . Тогда

$$B = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right), \quad C = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

По теореме о биссектрисе $BD : DC = 5 : 3$, поэтому

$$D = \left(\frac{15}{8}, 0\right).$$

Уравнение окружности ω , проходящей через A, B, C , имеет вид

$$x^2 + y^2 - 8x - \frac{2\sqrt{3}}{3}y = 0.$$

На оси Ox она пересекается в точках $A = (0, 0)$ и $E = (8, 0)$.

Окружность с диаметром DE имеет уравнение

$$\left(x - \frac{15}{8}\right)(x - 8) + y^2 = 0,$$

то есть

$$x^2 + y^2 - \frac{79}{8}x + 15 = 0.$$

Вычитая уравнения двух окружностей, получаем уравнение их общей хорды EF :

$$y = \frac{15\sqrt{3}}{16}(x - 8).$$

Подставляя его в уравнение ω , получаем

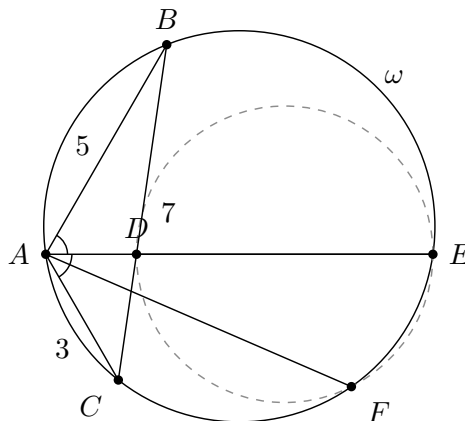
$$\frac{49}{256}(x - 8)(19x - 120) = 0.$$

Корень $x = 8$ соответствует точке E , поэтому

$$x_F = \frac{120}{19}, \quad y_F = -\frac{30\sqrt{3}}{19}.$$

Следовательно,

$$AF^2 = x_F^2 + y_F^2 = \frac{14400 + 2700}{361} = \frac{900}{19}.$$



Ответ. 900/19.

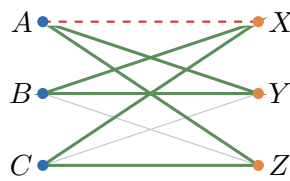
Задача 31. В стране 6 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причём между любой парой городов не более одной дороги. Известно, что какую бы существующую дорогу ни закрыли, после этого всё равно можно совершить замкнутую поездку, побывав в каждом городе ровно один раз, не считая возвращения в начальный город. Какое наименьшее число дорог могло быть в стране?

Решение. Из каждого города должно выходить хотя бы три дороги. Действительно, если степень некоторого города не превосходит 2, то после закрытия подходящей дороги у него останется не более одной дороги, а замкнутый маршрут через все города станет невозможен. Поэтому сумма степеней не меньше $6 \cdot 3 = 18$, а дорог не меньше 9.

Девяти дорог достаточно. Разобьём города на две тройки и соединим каждый город первой тройки с каждым городом второй. Получится граф $K_{3,3}$ с 9 дорогами. Если закрыта, например, дорога AX , то при обозначениях троек A, B, C и X, Y, Z остаётся цикл

$$A - Y - B - X - C - Z - A.$$

Для любой другой закрытой дороги рассуждение такое же. Значит, минимум равен 9.



Ответ. 9.

Задача 32. Есть 20 карт с числами $1, 2, \dots, 20$. У Антона карты $1, 5, 10, 15, 20$. Борис получает 5 карт из оставшихся 15. Играют 5 раундов: в каждом Антон первым кладёт одну неиспользованную карту, затем Борис, видя её, кладёт одну свою неиспользованную карту. Очко получает игрок, положивший карту с большим числом; побеждает тот, кто наберёт больше очков. Для скольких наборов из 5 карт Борис может гарантировать победу независимо от порядка ходов Антона?

Решение. Если все карты Бориса меньше 10, он не сможет побить карты $10, 15, 20$ и гарантировать победу не сможет. Среди доступных карт меньше 10 ровно семь: $2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$. Таких плохих наборов $C_7^5 = 21$.

Во всяком другом наборе у Бориса есть карта больше 10. Кроме того, среди пяти его карт обязательно есть ещё одна карта больше 5, поскольку доступных карт, не превосходящих 5, всего три: $2, 3, 4$. Борис может сохранить одну карту > 10 против 10, другую карту > 5 против 5 и любую третью карту против 1, а на 15 и 20 пожертвовать оставшиеся две. Так он гарантирует три очка и победу. Поэтому число подходящих наборов равно

$$C_{15}^5 - C_7^5 = 3003 - 21 = 2982.$$

Ответ. 2982.