

Математическая игра «7 чудес». 9 класс.

Задача 1. Найдите натуральное число n , если $[n/4] + [(n+1)/4] + [(n+2)/4] + [(n+3)/4] = 2026$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Задача 2. На координатной плоскости даны точки $A(0; a)$, $B(2; -1)$, $C(3; 2)$, $D(0; -1)$ и $O(0; 0)$, где $a > 0$. Площади треугольников ABD и COB равны. Найдите a .

Задача 3. Два игрока стоят на расстоянии 1500 см друг от друга и перебрасывают мяч. После каждого пойманного мяча расстояние между игроками увеличивается на 120 см, а после каждого непопавшего — уменьшается на 20 см. После некоторого числа бросков расстояние стало равно 1720 см. Сколько различных значений может принимать общее число бросков, если оно не превосходит 100?

Задача 4. Дано трёхзначное число, ни одна из цифр которого не равна нулю. Его цифры переставили в порядке убывания и получили новое трёхзначное число. Оказалось, что исходное число на 135 больше полученного. Найдите все возможные исходные числа.

Задача 5. Последовательность состоит из положительных целых чисел. Второй её член больше первого, а каждый член начиная с третьего равен сумме двух предыдущих. Известно, что шестой член равен 104. Какими могут быть первый и второй члены этой последовательности?

Задача 6. Точки A, B, C, D лежат на окружности в указанном порядке. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P . Известно, что $\angle BDC = 37^\circ$, $\angle ACD = 24^\circ$. Найдите $\angle APB$.

Задача 7. На шести гранях честного кубика написаны числа 1, 2, 2, 4, 7, 8. Кубик бросают. Если выпавшее число нечётно, все нечётные числа на гранях удваивают; если выпавшее число чётно, все чётные числа на гранях делят на 2. После этого кубик бросают ещё раз. Найдите вероятность того, что во второй раз выпадет число 2.

Задача 8. Найдите все натуральные числа n , для которых $[(n+2)/5] + [(n+4)/5] = 20$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Задача 9. Найдите все натуральные числа n , для которых $n+7$ делит $n^2 + 3n + 50$.

Задача 10. Точки A, B, C, D, E лежат на окружности в указанном порядке. Известно, что $AB = BC$, $CD = DE$, $\angle BDA = 20^\circ$, $\angle ACE = 50^\circ$. Найдите $\angle AED$.

Задача 11. Последовательность задана условиями $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = a_n^2 + 100$. Найдите остаток от деления a_{2026} на 10000.

Задача 12. Каждую вершину данного куба окрашивают в чёрный или белый цвет. На каждой грани должно оказаться ровно две чёрные вершины. Сколько существует раскрасок? Раскраски, отличающиеся цветом хотя бы одной вершины, считаются разными; повороты куба не отождествляются.

Задача 13. Для каждого $k = 1, 2, \dots, 20$ на координатной плоскости проведена прямая $y = kx + k^2$. Сколько различных точек пересечения пар этих прямых имеют абсциссу, кратную 3?

Задача 14. Стороны треугольника ABC равны $BC = 14$, $CA = 13$, $AB = 15$. Точка I — центр его вписанной окружности. Найдите AI .

Задача 15. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 24$ с целыми коэффициентами a и b имеет три различных положительных целых корня. Найдите сумму всех возможных значений $|a|$.

Задача 16. Прямоугольник 2×10 замощают плитками 1×2 и 2×2 ; плитки 1×2 разрешено поворачивать. Ровно три использованные плитки имеют размер 2×2 , причём никакие две такие плитки не имеют общей стороны. Сколько существует замощений?

Задача 17. Найдите наименьшее натуральное число n , для которого $[n/6] - [n/10] = 7$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Задача 18. Точки A, B, C, D, E лежат на окружности в указанном порядке, причём $AB = BC$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P . Известно, что $\angle AED = 74^\circ$, $\angle CBD = 26^\circ$. Найдите $\angle APB$.

Задача 19. Рост девяти игроков баскетбольной команды, в сантиметрах, равен 180, 181, 183, 187, 188, 190, 193, 195 и 196. Рост десятого игрока — целое число сантиметров. Сначала его записали неверно.



После исправления ошибки и среднее арифметическое, и медиана десяти значений увеличились на 0,5 см. Медианой десяти чисел называется среднее арифметическое пятого и шестого чисел после расположения всех десяти чисел в порядке неубывания. Найдите все возможные правильные значения роста десятого игрока.

Задача 20. У нескольких простых многоугольников выписали все их внутренние углы. Получился список из девяти углов: 30° , 50° , 60° , 70° , 90° , 100° , 120° , 160° и x° . Найдите x .

Задача 21. Даны три различных положительных целых числа $a < b < c$. Каждое из них делит сумму двух остальных. Найдите отношения b/a и c/a .

Задача 22. В треугольнике ABC известно, что $AB = 12$, $BC = 13$, $AC = 15$. Точка M лежит на стороне AC . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM и BCM , равны. Найдите отношение AM/CM .

Задача 23. Положительные целые числа a, b, c, d удовлетворяют равенствам $ab + cd = 13$ и $ac + bd = 11$. Найдите наименьшее возможное значение $a + b + c + d$.

Задача 24. Найдите наименьшее натуральное число n , для которого $[n^2/(n+4)] = n-4$. Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .

Задача 25. Строка состоит из 2026 букв, каждая из которых — А или Б. Палиндромом называется строка, которая одинаково читается слева направо и справа налево. Каково наибольшее целое число k , для которого в любой такой строке обязательно найдётся палиндром длины не меньше k , состоящий из подряд идущих букв?

Задача 26. $ABCD$ — трапеция с основаниями AB и CD , причём $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$. Окружность с диаметром AD касается стороны BC . Известно, что $AB = 7$, $BC = 8$. Найдите длину CD .

Задача 27. Для попарно различных положительных целых чисел p, q, r четыре числа $2r-21$, $3r-1$, $r+12$ и $3r-17$ в некотором порядке совпадают с числами $p, 2p, q, 2q$. Найдите все возможные значения r .

Задача 28. Каждую клетку таблицы 2×4 раскрашивают в один из четырёх цветов. Соседние по стороне клетки должны иметь разные цвета, причём каждый из четырёх цветов должен быть использован хотя бы один раз. Сколько существует таких раскрасок?

Задача 29. По кругу расположены 12 ламп, каждая из которых может быть включена или выключена. Сначала все лампы выключены. За один ход выбирают три подряд идущие по кругу лампы и меняют состояние каждой из них. Сколько различных состояний ламп можно получить?

Задача 30. Треугольник ABC , в котором $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 3$, вписан в окружность ω . Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D , а окружность ω второй раз — в точке E . Окружность с диаметром DE второй раз пересекает ω в точке F . Найдите AF .

Задача 31. В стране 6 городов. Некоторые пары городов соединены дорогами, причём между любой парой городов не более одной дороги. Известно, что какую бы существующую дорогу ни закрыли, после этого всё равно можно совершить замкнутую поездку, побывав в каждом городе ровно один раз, не считая возвращения в начальный город. Какое наименьшее число дорог могло быть в стране?

Задача 32. Есть 20 карт с числами $1, 2, \dots, 20$. У Антона карты $1, 5, 10, 15, 20$. Борис получает 5 карт из оставшихся 15. Играют 5 раундов: в каждом Антон первым кладёт одну неиспользованную карту, затем Борис, видя её, кладёт одну свою неиспользованную карту. Очко получает игрок, положивший карту с большим числом; побеждает тот, кто наберёт больше очков. Для скольких наборов из 5 карт Борис может гарантировать победу независимо от порядка ходов Антона?