

Математическая игра «Первичный бульон».

10–11 классы. Решения



Задача 1. Последовательно выписали числа $1000^2, 1001^2, 1002^2, \dots$. В каждом из них отбросили две последние цифры. Найдите наибольшее k , при котором первые k членов полученной последовательности образуют арифметическую прогрессию.

Ответ. 10

Решение. Для $j \geq 0$ после отбрасывания двух последних цифр числа $(1000 + j)^2$ получаем

$$\left\lfloor \frac{(1000 + j)^2}{100} \right\rfloor = 10000 + 20j + \left\lfloor \frac{j^2}{100} \right\rfloor.$$

При $j = 0, 1, \dots, 9$ последнее слагаемое равно нулю, поэтому первые 10 чисел образуют арифметическую прогрессию с разностью 20. При $j = 10$ последнее слагаемое становится равным 1, поэтому одиннадцатое число уже не продолжает эту прогрессию. Значит, $k = 10$.

Задача 2. Сколькими способами можно выбрать два различных положительных делителя числа 1600000 так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ. 900

Решение. Имеем

$$1600000 = 2^9 \cdot 5^5.$$

Каждый положительный делитель имеет вид $2^a 5^b$, где $0 \leq a \leq 9$ и $0 \leq b \leq 5$. По модулю 3

$$2^a 5^b \equiv (-1)^{a+b}.$$

Из $10 \cdot 6 = 60$ пар (a, b) ровно половина имеет чётную сумму, а половина — нечётную. Значит, 30 делителей дают остаток 1 при делении на 3, а 30 — остаток 2.

Сумма двух делителей делится на 3 тогда и только тогда, когда один имеет остаток 1, а другой — остаток 2. Получаем

$$30 \cdot 30 = 900.$$

Задача 3. Сколько существует девятизначных чисел, в десятичной записи каждого из которых цифры $1, 2, \dots, 9$ встречаются ровно по одному разу, и из записи можно вычеркнуть четыре цифры, получив 12345, но нельзя вычеркнуть три цифры, получив 123456?

Ответ. 2520

Решение. Возможность получить 12345 означает, что цифры 1, 2, 3, 4, 5 стоят в таком относительном порядке. Среди всех $9!$ перестановок каждая из $5!$ относительных перестановок этих пяти цифр встречается одинаково часто, поэтому таких чисел

$$\frac{9!}{5!} = 3024.$$

Из них число 123456 можно получить вычёркиванием трёх цифр ровно тогда, когда цифры $1, 2, \dots, 6$ стоят в таком относительном порядке. Таких чисел

$$\frac{9!}{6!} = 504.$$

Следовательно, искомое количество равно $3024 - 504 = 2520$.

Задача 4. Целые числа x, y и z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2y + y^2z + z^2x = 2186, \\ xy^2 + yz^2 + zx^2 = 2188. \end{cases}$$

Найдите $x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ. 245

Решение. Вычитая первое равенство из второго, получаем

$$(x - y)(y - z)(z - x) = 2.$$

Числа $x - y$, $y - z$ и $z - x$ — целые, их сумма равна нулю, а произведение равно 2. Единственная возможность, с точностью до циклической перестановки, — это разности $-1, -1, 2$. Поэтому можно записать

$$x = t, \quad y = t + 1, \quad z = t + 2.$$

Подставляя в первое уравнение, получаем

$$3(t - 8)(t^2 + 11t + 91) = 0.$$

У квадратного множителя дискриминант равен $11^2 - 4 \cdot 91 = -243 < 0$, поэтому $t = 8$. Следовательно,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8^2 + 9^2 + 10^2 = 245.$$

Задача 5. Возрастающая арифметическая прогрессия (b_k) состоит из натуральных чисел, $b_1 = 1$ и $b_{b_2} = 10$. Положим $n = b_{b_3}$. Найдите b_n .

Ответ. 55

Решение. Пусть $d > 0$ — разность прогрессии. Тогда $b_2 = 1 + d$, а

$$b_{b_2} = 1 + (b_2 - 1)d = 1 + d^2 = 10.$$

Отсюда $d = 3$. Тогда $b_3 = 7$, поэтому

$$n = b_7 = 1 + 6 \cdot 3 = 19,$$

и

$$b_n = b_{19} = 1 + 18 \cdot 3 = 55.$$

Задача 6. В треугольнике ABC медианы, проведённые из вершин A и B , перпендикулярны. Известно, что $BC = 8$, $CA = 6$. Найдите AB .

Ответ. $2\sqrt{5}$

Решение. Обозначим середины сторон BC и AC через D и E соответственно, а точку пересечения медиан AD и BE — через G . Положим

$$a = BC = 8, \quad b = CA = 6, \quad c = AB,$$

а длины медиан AD и BE обозначим через m_a и m_b .

Так как $AG \perp BG$, по теореме Пифагора в треугольнике AGB

$$c^2 = AG^2 + BG^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2).$$

По формулам медиан

$$m_a^2 + m_b^2 = \frac{a^2 + b^2 + 4c^2}{4}.$$

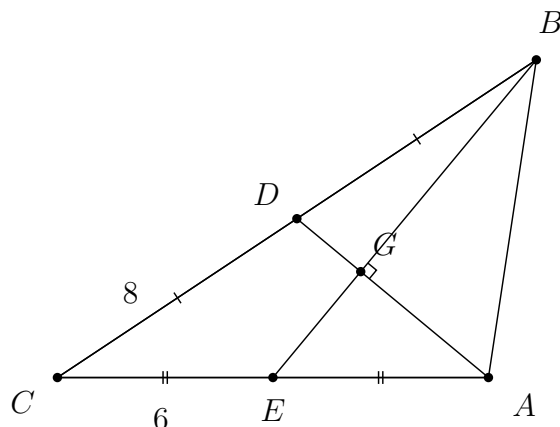
Следовательно,

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2 + 4c^2}{9},$$

то есть

$$5c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 = 100.$$

Значит, $c^2 = 20$ и $AB = c = 2\sqrt{5}$.



Задача 7. 45 друзей хотят обменяться друг с другом новостями. Для встреч предложено 10 дней, причём каждый из друзей может присутствовать ровно в 8 из них. В каждый выбранный день встречаются все, кто может прийти. Каждый сообщает остальным все новости, известные ему к этому моменту. Вне встреч друзья друг с другом не общаются, а новых новостей между предложенными днями не возникает. Какое наименьшее число встреч нужно провести, чтобы каждый гарантированно узнал новости всех остальных?

Ответ. 5

Решение. Покажем сначала, что четырёх встреч может не хватить. Всего существует

$$C_{10}^2 = 45$$

пар дней. Сопоставим каждому из 45 друзей свою пару дней и объявим эти два дня днями, в которые он не может прийти.

Выберем любые четыре дня и занумеруем их по времени. Среди друзей есть человек A , который отсутствует в первые два выбранных дня, и человек B , который отсутствует в последние два. До третьей встречи новость A ещё не могла попасть к участникам встреч, а на третью и четвёртую встречи B не приходит. Поэтому B не узнает новость A . Значит, четырёх встреч гарантированно недостаточно.

Теперь выберем любые пять дней. Каждый человек пропускает среди них не более двух дней. Для любых двух друзей объединение множеств пропущенных ими дней содержит не более четырёх дней, поэтому хотя бы в один из пяти дней оба могут прийти. Значит, каждая пара друзей встретится непосредственно, и каждый узнает новости всех остальных. Итак, достаточно пяти встреч.

Задача 8. Пусть

$$S_n = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos n^\circ.$$

Найдите наименьшее натуральное $n > 37$, для которого $S_n < S_{37}$.

Ответ. 143

Решение. По формуле суммы косинусов

$$2 \sin 0,5^\circ S_n = \sin(n + 0,5)^\circ - \sin 0,5^\circ.$$

Поэтому неравенство $S_n < S_{37}$ равносильно

$$\sin(n + 0,5)^\circ < \sin 37,5^\circ.$$

При $38 \leq n \leq 142$ имеем

$$38,5^\circ \leq n + 0,5^\circ \leq 142,5^\circ,$$

и на этом промежутке синус не меньше $\sin 37,5^\circ$. При $n = 142$ получается равенство

$$\sin 142,5^\circ = \sin 37,5^\circ.$$

При $n = 143$ уже

$$\sin 143,5^\circ < \sin 37,5^\circ.$$

Следовательно, наименьшее подходящее n равно 143.

Задача 9. Для скольких целых n выражение

$$160000 \left(\left(\frac{5}{4} \right)^n + \left(\frac{5}{4} \right)^{n+1} \right)$$

является целым числом?

Ответ. 8

Решение. Преобразуем выражение:

$$160000 \left(\frac{5}{4} \right)^n \left(1 + \frac{5}{4} \right) = 360000 \left(\frac{5}{4} \right)^n.$$

При этом

$$360000 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4.$$

Если $n \geq 0$, целочисленность равносильна условию $2n \leq 6$, то есть $n \leq 3$. Если $n = -k < 0$, получаем $360000(4/5)^k$, и целочисленность равносильна $k \leq 4$. Значит, подходят

$$n = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,$$

то есть всего 8 значений.

Задача 10. Куб $3 \times 3 \times 3$ составлен из 27 единичных кубиков. Кубики по одному убирают так, чтобы после каждого удаления оставшиеся кубики образовывали связное по граням тело. В конце площадь поверхности получившегося тела оказалась равна площади поверхности исходного куба. Какое наибольшее количество кубиков можно убрать?

Ответ. 14

Решение. Пусть осталось k кубиков, а e пар оставшихся кубиков имеют общую грань. Площадь поверхности равна

$$6k - 2e = 54.$$

Так как тело связно по граням, граф соседства кубиков связан, поэтому $e \geq k - 1$. Следовательно,

$$54 = 6k - 2e \leq 6k - 2(k - 1) = 4k + 2,$$

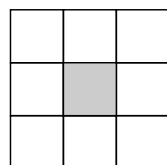
откуда $k \geq 13$. Значит, убрать можно не более 14 кубиков.

Покажем, что 13 кубиков оставить можно. В нижнем слое оставим только центральный кубик; в среднем — все кубики, кроме двух противоположных кубиков, стоящих в середине сторон; в верхнем — четыре угловых кубика и центральный. Получается $1 + 7 + 5 = 13$ кубиков. В среднем слое имеется 6 общих граней, между нижним и средним слоями — 1, между средним и верхним — 5, всего $e = 12$. Поэтому площадь поверхности равна

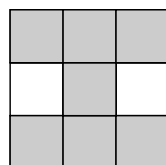
$$6 \cdot 13 - 2 \cdot 12 = 54.$$

Такую конфигурацию можно получить последовательными допустимыми удалениями. Действительно, возьмём остовное дерево графа соседства оставшихся 13 кубиков и дополним его до остовного дерева графа всех 27 кубиков. Компоненты, добавленные к исходному дереву, можно удалять с концов: каждый раз удаляем лист расширенного дерева, не принадлежащий конечной конфигурации. Связность после каждого удаления сохраняется.

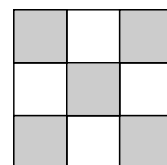
На рисунке закрашены кубики, которые остаются.



нижний слой



средний слой



верхний слой

Задача 11. Найдите наименьшее натуральное n , при котором

$$\sqrt{99 + \sqrt{n}} + \sqrt{99 - \sqrt{n}}$$

является целым числом.

Ответ. 5832

Решение. Обозначим данное целое число через A . Тогда

$$A^2 = 198 + 2\sqrt{9801 - n}.$$

Следовательно, $2\sqrt{9801 - n}$ — целое число. Пусть оно равно q . Тогда

$$q^2 = 4(9801 - n),$$

поэтому q чётно и $\sqrt{9801 - n}$ тоже является целым числом. Обозначим его через m .

Имеем $0 \leq m \leq 98$ и

$$A^2 = 198 + 2m.$$

Правая часть чётна, поэтому A чётно. Кроме того,

$$198 \leq A^2 < 396,$$

откуда $A = 16$ или $A = 18$. При $A = 16$ получаем $m = 29$ и

$$n = 9801 - 29^2 = 8960.$$

При $A = 18$ получаем $m = 63$ и

$$n = 9801 - 63^2 = 5832.$$

Наименьшее значение равно 5832.

Задача 12. На параболе $y = x^2$ дана точка $P = (5, 25)$. Через P проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Каждая из них пересекает ось Ox и, кроме точки P , ещё раз пересекает параболу; все четыре полученные точки отличны от начала координат. Первая прямая пересекает ось Ox в точке $A = (a, 0)$, а параболу второй раз — в точке $B = (b, b^2)$; вторая прямая — соответственно в точках $C = (c, 0)$ и $D = (d, d^2)$. Найдите значение выражения $\frac{ac}{bd}$.

Ответ. -25

Решение. Рассмотрим одну из прямых через P и обозначим её угловой коэффициент через m :

$$y - 25 = m(x - 5).$$

Её пересечение с осью Ox имеет абсциссу

$$a = 5 - \frac{25}{m}.$$

Точки пересечения этой прямой с параболой удовлетворяют уравнению

$$x^2 - mx + 5m - 25 = 0.$$

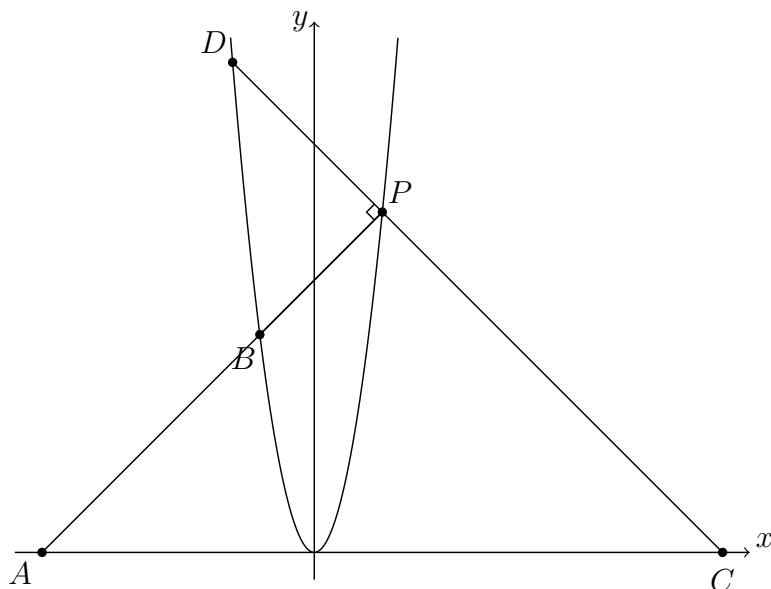
Один корень равен 5, поэтому второй равен $b = m - 5$. В допустимых случаях $b \neq 0$, и

$$\frac{a}{b} = \frac{5 - 25/m}{m - 5} = \frac{5}{m}.$$

Пусть угловые коэффициенты двух прямых равны m_1 и m_2 . Так как они перпендикулярны, $m_1 m_2 = -1$. Поэтому

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{5}{m_1} \cdot \frac{5}{m_2} = -25.$$

На чертеже показан один допустимый случай: угловые коэффициенты прямых равны 1 и -1 .



Задача 13. Действительные числа a , b и c удовлетворяют $b > a$, а квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ неотрицателен при всех действительных x . Найдите наименьшее возможное значение

$$\frac{11a + b + c}{b - a}.$$

Ответ. 5

Решение. Сначала заметим, что $a > 0$. При $a < 0$ многочлен принимает отрицательные значения при достаточно больших $|x|$. При $a = 0$ линейная функция, неотрицательная на всей прямой, должна иметь $b = 0$, что противоречит $b > a = 0$.

При $a > 0$ условие неотрицательности равносильно

$$c \geq \frac{b^2}{4a}.$$

Положим $t = b - a > 0$, то есть $b = a + t$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{11a + b + c}{b - a} &\geq \frac{12a + t + (a + t)^2 / (4a)}{t} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{49a}{4t} + \frac{t}{4a}. \end{aligned}$$

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{49a}{4t} + \frac{t}{4a} \geq \frac{7}{2}.$$

Поэтому всё выражение не меньше 5.

Равенство достигается при $t = 7a$, то есть при $b = 8a$, и $c = 16a$; тогда

$$f(x) = a(x + 4)^2.$$

Следовательно, искомый минимум равен 5.

Задача 14. Начинают с упорядоченной пары $(1, 1)$. За один ход одно из двух чисел заменяют суммой обоих чисел. Сколько упорядоченных пар положительных целых чисел с суммой 2026 можно получить?

Ответ. 1012

Решение. НОД двух чисел при каждом ходе сохраняется, поэтому в любой достижимой паре числа взаимно просты.

Обратно, пусть (x, y) — пара положительных взаимно простых чисел. Если $x \neq y$, вычтем меньшее число из большего. Получим снова пару положительных взаимно простых чисел, но с меньшей суммой. Продолжая обратный алгоритм Евклида, обязательно придём к $(1, 1)$. Значит, в прямом направлении достижима любая положительная взаимно простая пара.

При $x + y = 2026$ имеем

$$\gcd(x, y) = \gcd(x, 2026).$$

Поэтому число подходящих упорядоченных пар равно $\varphi(2026)$. Так как $2026 = 2 \cdot 1013$ и 1013 — простое,

$$\varphi(2026) = 2026 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{1013}\right) = 1012.$$

Задача 15. На плоскости отмечены 3600 различных точек, каждая красного или синего цвета. Для каждой синей точки нарисована окружность радиуса 1 с центром в этой точке. Оказалось, что на каждой нарисованной окружности лежат ровно две красные точки. Какое максимальное число отмеченных синих точек могло быть?

Ответ. 3540

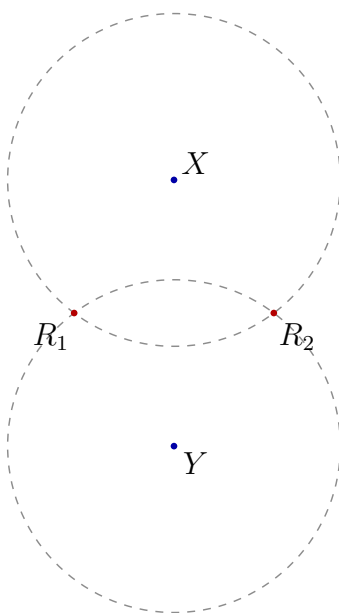
Решение. Пусть красных точек r , а синих — b . Каждая синяя точка задаёт пару красных точек на единичной окружности с центром в ней. Для любой фиксированной пары красных точек существует не более двух центров единичных окружностей, проходящих через обе точки. Поэтому

$$b \leq 2C_r^2 = r(r-1).$$

Так как $r + b = 3600$, получаем

$$3600 \leq r + r(r-1) = r^2,$$

откуда $r \geq 60$ и $b \leq 3540$.



Два возможных центра единичных окружностей для фиксированной пары красных точек.

Покажем, что оценка достигается. Расположим 60 красных точек на одной прямой внутри отрезка длины меньше 2. Для каждой пары красных точек отметим синим оба центра единичных окружностей, проходящих через эту пару. Все эти центры различны: одна окружность пересекает красную прямую не более чем в двух точках, поэтому пара красных точек однозначно восстанавливается по окружности. По той же причине на каждой построенной окружности нет третьей красной точки. Получаем

$$2C_{60}^2 = 3540$$

синих точек.

Задача 16. Натуральное число назовём волшебным, если все его цифры ненулевые и при последовательном удалении старшего разряда из текущего числа на каждом шаге получается делитель этого числа. Например, 312 — волшебное, так как 312 делится на 12, а 12 делится на 2. Найдите все волшебные пятизначные числа.

Ответ. 53125, 91125, 95625

Решение. Пусть пятизначное волшебное число имеет вид $abcde$, а его четырёхзначный суффикс — $bcde$. Так как $bcde \mid abcde$, то

$$bcde \mid (abcde - bcde) = 10000a.$$

Если $e \neq 5$, то из-за ненулевых цифр $e \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, поэтому число $bcde$ взаимно просто с 5. Тогда из $bcde \mid 16 \cdot 625a$ следует $bcde \mid 16a$, что невозможно, поскольку $bcde \geq 1000$, а $16a \leq 144$. Значит, $e = 5$.

Теперь $bcde$ нечётно, поэтому из $bcde \mid 16 \cdot 625a$ следует

$$bcde \mid 625a.$$

Рассмотрим $a = 1, 2, \dots, 9$. Четырёхзначные делители числа $625a$, не содержащие нулевых цифр, возникают только в следующих случаях:

a	$bcde$
3	1875
5	3125
6	1875
7	4375
9	1125, 1875, 5625

Поэтому остаются семь кандидатов

$$31875, 53125, 61875, 74375, 91125, 91875, 95625.$$

Остаётся проверить требования делимости для трёх-, двух- и однозначных суффиксов. Им удовлетворяют ровно

$$53125, \quad 91125, \quad 95625.$$

Задача 17. Семь человек независимо посчитали жетоны в коробке. Один из них ошибся на 1 в разряде единиц, то есть на 1 жетон; другой — на 1 в разряде десятков, то есть на 10 жетонов; третий — на 1 в разряде сотен, то есть на 100 жетонов. Остальные четверо посчитали правильно. Сумма семи полученных результатов равна 3162. Сколько жетонов в коробке?

Ответ. 439

Решение. Пусть истинное количество жетонов равно N . Тогда

$$3162 = 7N \pm 1 \pm 10 \pm 100.$$

Возможные значения поправки $\pm 1 \pm 10 \pm 100$ равны

$$111, 109, 91, 89, -89, -91, -109, -111.$$

Так как $3162 \equiv 5 \pmod{7}$, поправка должна быть сравнима с 5 по модулю 7. Из перечисленных значений это выполняется только для 89. Поэтому

$$7N = 3162 - 89 = 3073,$$

откуда $N = 439$.

Задача 18. В треугольнике ABC биссектриса AM пересекает сторону BC . Точка N — середина стороны AC . Известно, что площади треугольников ABM и MNC равны. Во сколько раз AC больше AB ?

Ответ. 2

Решение. Так как N — середина AC , треугольники AMN и MNC имеют равные основания $AN = NC$, лежащие на одной прямой, и общую высоту из M . Поэтому

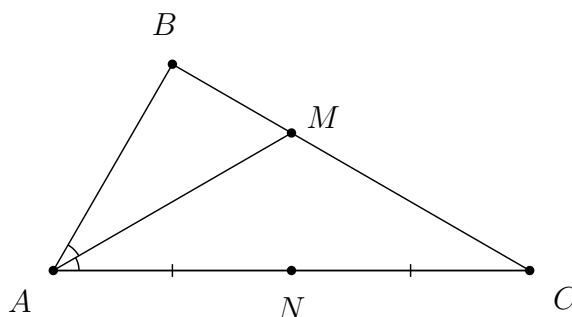
$$S_{AMN} = S_{MNC}.$$

По условию $S_{ABM} = S_{MNC}$, значит,

$$S_{ABM} = S_{AMN}.$$

У треугольников ABM и ANM общий отрезок AM , а углы BAM и MAN равны, поскольку AM — биссектриса. Из формулы площади через две стороны и угол между ними получаем $AB = AN$. Но $AN = AC/2$, следовательно,

$$AC = 2AB.$$



Задача 19. На координатной плоскости нарисован квадрат с вершинами $(0, 0)$, $(0, 69)$, $(69, 69)$, $(69, 0)$. Сколько существует пар различных узлов целочисленной решётки строго внутри квадрата, в которых хотя бы один узел лежит на одной из диагоналей квадрата, а два узла имеют разные абсциссы и разные ординаты?

Ответ. 601460

Решение. Всего строго внутри квадрата находится

$$68^2 = 4624$$

узла. На каждой диагонали — по 68 внутренних узлов. Диагонали не имеют общего целочисленного внутреннего узла, поскольку их точка пересечения $(34,5; 34,5)$ не является узлом решётки. Значит, диагональных узлов 136.

Сначала посчитаем пары, в которых обе точки лежат на диагоналях. Для фиксированной диагональной точки среди остальных 135 диагональных точек нужно исключить две: одну с той же абсциссой и одну с той же ординатой. Остаётся 133 точки. Поэтому таких неупорядоченных пар

$$\frac{136 \cdot 133}{2} = 9044.$$

Теперь пусть ровно одна точка диагональная. Недиагональных внутренних узлов

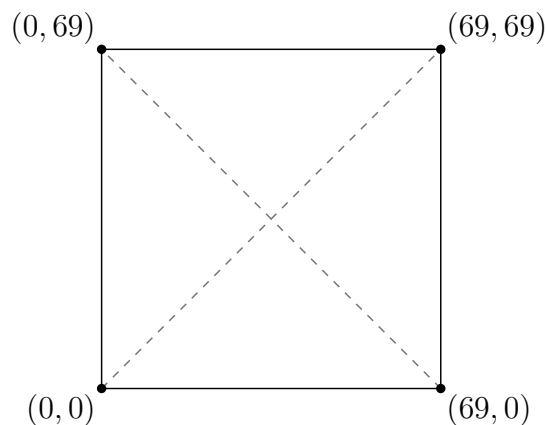
$$4624 - 136 = 4488.$$

Для фиксированной диагональной точки среди них запрещены 66 недиагональных точек с той же абсциссой и 66 с той же ординатой; эти два множества не пересекаются. Поэтому допустимых партнёров

$$4488 - 66 - 66 = 4356.$$

Таких пар $136 \cdot 4356 = 592416$. Итого

$$9044 + 592416 = 601460.$$



Задача 20. Натуральное число $n \leq 2026$ имеет ровно 12 положительных делителей. Сумма всех различных простых делителей числа n также равна 12. Какие значения может принимать n ?

Ответ. 84, 126, 294

Решение. Если натуральное число имеет ровно 12 делителей, показатели степеней в его разложении на простые имеют один из видов

$$11; \quad 5, 1; \quad 3, 2; \quad 2, 1, 1.$$

Если простой делитель один, то он должен был бы равняться 12, что невозможно.

Если простых делителей два, их сумма равна 12, поэтому это 5 и 7. При типах разложения $p^5 q$ и $p^3 q^2$ наименьшее возможное число уже не меньше

$$5^3 \cdot 7^2 = 6125 > 2026,$$

поэтому этот случай невозможен.

Значит, простых делителей три. Единственная тройка различных простых чисел с суммой 12 — это 2, 3, 7. Разложение имеет вид $p^2 qr$, поэтому квадрат можно поставить на любой из трёх простых множителей. Получаем

$$2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84, \quad 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126, \quad 2 \cdot 3 \cdot 7^2 = 294.$$

Все три числа подходят.

Задача 21. Для $-1 < r < 1$ положим

$$S(r) = 12 + 12r + 12r^2 + \dots$$

Известно, что $a \in (-1, 1)$ и $S(a)S(-a) = 2016$. Найдите $S(a) + S(-a)$.

Ответ. 336

Решение. Так как $|r| < 1$,

$$S(r) = \frac{12}{1-r}.$$

Поэтому

$$S(a)S(-a) = \frac{144}{1-a^2} = 2016,$$

откуда

$$\frac{1}{1-a^2} = 14.$$

Тогда

$$S(a) + S(-a) = \frac{12}{1-a} + \frac{12}{1+a} = \frac{24}{1-a^2} = 24 \cdot 14 = 336.$$

Задача 22. Кубический многочлен f с действительными коэффициентами удовлетворяет

$$|f(1)| = |f(2)| = |f(3)| = |f(5)| = |f(6)| = |f(7)| = 12.$$

Найдите $|f(0)|$.

Ответ. 72

Решение. В каждой из шести указанных точек f принимает значение 12 или -12 . Многочлены $f - 12$ и $f + 12$ имеют степень 3, поэтому ни одно из значений 12 и -12 не может встретиться в четырёх из этих точек. Значит, каждое встречается ровно три раза.

Корни $f - 12$ образуют одну тройку, а корни $f + 12$ — другую. Коэффициенты при x^2 у этих двух многочленов одинаковы, поэтому суммы корней двух троек равны. Сумма всех шести чисел равна 24, значит, сумма каждой тройки равна 12. Единственные тройки из множества $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ с такой суммой:

$$\{1, 5, 6\}, \quad \{2, 3, 7\}.$$

Кроме того,

$$1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 41.$$

Пусть, например,

$$f(x) - 12 = c(x - 1)(x - 5)(x - 6),$$

$$f(x) + 12 = c(x - 2)(x - 3)(x - 7).$$

Подставляя $x = 0$ и вычитая первое равенство из второго, получаем

$$24 = c(-42 + 30) = -12c,$$

откуда $c = -2$. Тогда

$$f(0) = 12 + (-2)(-1)(-5)(-6) = 72.$$

При противоположном распределении знаков получается $f(0) = -72$, поэтому в любом случае $|f(0)| = 72$.

Задача 23. В прямоугольном треугольнике ABC , $\angle A = 90^\circ$, высота $АН$ проведена к гипотенузе BC . Точки $K \in BH$ и $M \in CH$ выбраны так, что $BK : KH = 1 : 2$, а $CM : MH = 1 : 10$. Точка O — ортоцентр треугольника AKM . Найдите отношение $AO : OH$.

Ответ. 13 : 20

Решение. Пусть $BK = x$. Тогда $KH = 2x$ и $BH = 3x$. Пусть $CM = y$. Тогда $MH = 10y$ и $CH = 11y$. Для высоты к гипотенузе прямоугольного треугольника

$$AH^2 = BH \cdot CH = 33xy.$$

Введём координаты

$$H = (0, 0), \quad A = (0, h), \quad K = (-2x, 0), \quad M = (10y, 0),$$

где $h = AH$. Высота треугольника AKM , проведённая из A , совпадает с $АН$, поэтому ортоцентр O лежит на $АН$.

Прямая AM имеет угловой коэффициент $-h/(10y)$, значит, высота из K имеет угловой коэффициент $10y/h$. На оси Oy , то есть при абсциссе 0, её ордината равна

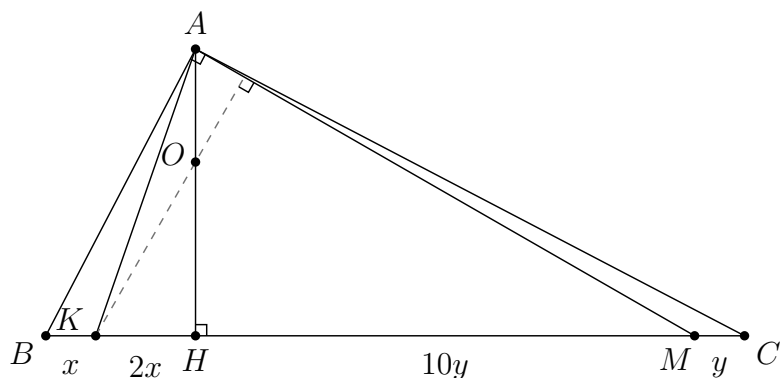
$$OH = \frac{20xy}{h}.$$

Следовательно,

$$\frac{AH}{OH} = \frac{h^2}{20xy} = \frac{33}{20}.$$

Значит, O лежит между H и A , и

$$\frac{AO}{OH} = \frac{AH - OH}{OH} = \frac{33}{20} - 1 = \frac{13}{20}.$$



Задача 24. По кругу записаны 150 неотрицательных целых чисел, сумма которых равна n . Назовём число удачным, если оба соседних с ним числа положительны. Раз в минуту выбирают удачное число, прибавляют к нему 2, а из каждого из его соседей вычитают по 1. Процесс заканчивается, если не осталось ни одного удачного числа. Найдите наибольшее n , при котором процесс заведомо закончится независимо от начальной расстановки и выбора удачных чисел.

Ответ. 149

Решение. При $n = 150$ процесс может продолжаться бесконечно. Рассмотрим по кругу расстановку

$$2, 0, 1, 1, \dots, 1.$$

Ноль является удачным, и после хода с ним получается

$$1, 2, 0, 1, \dots, 1,$$

то есть прежняя расстановка, сдвинутая на одну позицию. Повторяя такие ходы, после 150 шагов вернёмся в исходное состояние. Значит, искомое n не превосходит 149.

Пусть теперь $n \leq 149$. В любой момент сумма чисел сохраняется и остаётся меньше 150, поэтому среди 150 чисел есть хотя бы один ноль. Нули разбивают круг на дуги положительных чисел между соседними нулями. Хотя бы одна такая дуга целиком состоит из единиц. Действительно, если соседних нулей нет и в каждой положительной дуге есть число хотя бы 2, то сумма на каждой дуге как минимум на единицу больше числа её позиций; после суммирования по всем дугам общая сумма была бы не меньше 150, что невозможно. Случай двух соседних нулей можно считать дугой из единиц длины 0.

В каждый момент рассмотрим минимальную длину дуги, целиком состоящей из единиц. Эта величина не увеличивается. Действительно, если выбранная кратчайшая дуга не затронута ходом, она сохраняется. Если ход её затрагивает, то либо его центр — внутренняя единица и дуга разбивается на более короткие дуги из единиц, либо центр — ноль на одном из концов и дуга укорачивается на одну позицию. Поэтому минимальная длина может уменьшиться лишь конечное число раз. После некоторого момента она постоянна. Возьмём тогда одну из кратчайших дуг: никакой последующий ход уже не может её затронуть, иначе возникла бы более короткая. Значит, существует непустая зона позиций, которые с этого момента никогда не выбираются центрами ходов.

Предположим, что процесс всё же бесконечен. При фиксированной сумме n возможных расстановок конечное число, поэтому после указанного момента некоторая расстановка повторится. Между двумя её повторениями обозначим через x_i число ходов с центром в i -й позиции. Для каждой позиции итоговое изменение равно нулю, поэтому

$$2x_i - x_{i-1} - x_{i+1} = 0$$

для всех i по модулю 150.

Если x_j максимально, то из равенства следует $x_{j-1} = x_j = x_{j+1}$. Распространяя это по кругу, получаем

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{150}.$$

Между повторениями был хотя бы один ход, значит, все x_i положительны. Но в найденной выше зоне центры ходов уже не выбираются, поэтому для её позиций $x_i = 0$. Противоречие. Следовательно, при $n \leq 149$ процесс всегда заканчивается, и ответ равен 149.