

Математическая игра «Первичный бульон».

10–11 классы. Условия



Задача 1. Последовательно выписали числа $1000^2, 1001^2, 1002^2, \dots$. В каждом из них отбросили две последние цифры. Найдите наибольшее k , при котором первые k членов полученной последовательности образуют арифметическую прогрессию.

Задача 2. Сколькими способами можно выбрать два различных положительных делителя числа 1600000 так, чтобы их сумма делилась на 3?

Задача 3. Сколько существует девятизначных чисел, в десятичной записи каждого из которых цифры $1, 2, \dots, 9$ встречаются ровно по одному разу, и из записи можно вычеркнуть четыре цифры, получив 12345, но нельзя вычеркнуть три цифры, получив 123456?

Задача 4. Целые числа x, y и z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2y + y^2z + z^2x = 2186, \\ xy^2 + yz^2 + zx^2 = 2188. \end{cases}$$

Найдите $x^2 + y^2 + z^2$.

Задача 5. Возрастающая арифметическая прогрессия (b_k) состоит из натуральных чисел, $b_1 = 1$ и $b_{b_2} = 10$. Положим $n = b_{b_3}$. Найдите b_n .

Задача 6. В треугольнике ABC медианы, проведённые из вершин A и B , перпендикулярны. Известно, что $BC = 8$, $CA = 6$. Найдите AB .

Задача 7. 45 друзей хотят обменяться друг с другом новостями. Для встреч предложено 10 дней, причём каждый из друзей может присутствовать ровно в 8 из них. В каждый выбранный день встречаются все, кто может прийти. Каждый сообщает остальным все новости, известные ему к этому моменту. Вне встреч друзья друг с другом не общаются, а новых новостей между предложенными днями не возникает. Какое наименьшее число встреч нужно провести, чтобы каждый гарантированно узнал новости всех остальных?

Задача 8. Пусть

$$S_n = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos n^\circ.$$

Найдите наименьшее натуральное $n > 37$, для которого $S_n < S_{37}$.

Задача 9. Для скольких целых n выражение

$$160000 \left(\left(\frac{5}{4} \right)^n + \left(\frac{5}{4} \right)^{n+1} \right)$$

является целым числом?

Задача 10. Куб $3 \times 3 \times 3$ составлен из 27 единичных кубиков. Кубики по одному убирают так, чтобы после каждого удаления оставшиеся кубики образовывали связное по граням тело. В конце площадь поверхности получившегося тела оказалась равна площади поверхности исходного куба. Какое наибольшее количество кубиков можно убрать?

Задача 11. Найдите наименьшее натуральное n , при котором

$$\sqrt{99 + \sqrt{n}} + \sqrt{99 - \sqrt{n}}$$

является целым числом.

Задача 12. На параболе $y = x^2$ дана точка $P = (5, 25)$. Через P проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Каждая из них пересекает ось Ox и, кроме точки P , ещё раз пересекает параболу; все четыре полученные точки отличны от начала координат. Первая прямая пересекает ось Ox в точке $A = (a, 0)$, а параболу второй раз — в точке $B = (b, b^2)$; вторая прямая — соответственно в точках $C = (c, 0)$ и $D = (d, d^2)$. Найдите значение выражения ac/db .

Задача 13. Действительные числа a , b и c удовлетворяют $b > a$, а квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ неотрицателен при всех действительных x . Найдите наименьшее возможное значение

$$\frac{11a + b + c}{b - a}.$$

Задача 14. Начинают с упорядоченной пары $(1, 1)$. За один ход одно из двух чисел заменяют суммой обоих чисел. Сколько упорядоченных пар положительных целых чисел с суммой 2026 можно получить?

Задача 15. На плоскости отмечены 3600 различных точек, каждая красного или синего цвета. Для каждой синей точки нарисована окружность радиуса 1 с центром в этой точке. Оказалось, что на каждой нарисованной окружности лежат ровно две красные точки. Какое максимальное число отмеченных синих точек могло быть?

Задача 16. Натуральное число назовём волшебным, если все его цифры ненулевые и при последовательном удалении старшего разряда из текущего числа на каждом шаге получается делитель этого числа. Например, 312 — волшебное, так как 312 делится на 12, а 12 делится на 2. Найдите все волшебные пятизначные числа.

Задача 17. Семь человек независимо посчитали жетоны в коробке. Один из них ошибся на 1 в разряде единиц, то есть на 1 жетон; другой — на 1 в разряде десятков, то есть на 10 жетонов; третий — на 1 в разряде сотен, то есть на 100 жетонов. Остальные четверо посчитали правильно. Сумма семи полученных результатов равна 3162. Сколько жетонов в коробке?

Задача 18. В треугольнике ABC биссектриса AM пересекает сторону BC . Точка N — середина стороны AC . Известно, что площади треугольников ABM и MNC равны. Во сколько раз AC больше AB ?

Задача 19. На координатной плоскости нарисован квадрат с вершинами $(0, 0)$, $(0, 69)$, $(69, 69)$, $(69, 0)$. Сколько существует пар различных узлов целочисленной решётки строго внутри квадрата, в которых хотя бы один узел лежит на одной из диагоналей квадрата, а два узла имеют разные абсциссы и разные ординаты?

Задача 20. Натуральное число $n \leq 2026$ имеет ровно 12 положительных делителей. Сумма всех различных простых делителей числа n также равна 12. Какие значения может принимать n ?

Задача 21. Для $-1 < r < 1$ положим

$$S(r) = 12 + 12r + 12r^2 + \dots$$

Известно, что $a \in (-1, 1)$ и $S(a)S(-a) = 2016$. Найдите $S(a) + S(-a)$.

Задача 22. Кубический многочлен f с действительными коэффициентами удовлетворяет

$$|f(1)| = |f(2)| = |f(3)| = |f(5)| = |f(6)| = |f(7)| = 12.$$

Найдите $|f(0)|$.

Задача 23. В прямоугольном треугольнике ABC , $\angle A = 90^\circ$, высота AN проведена к гипотенузе BC . Точки $K \in BN$ и $M \in CN$ выбраны так, что $BK : KN = 1 : 2$, а $CM : MN = 1 : 10$. Точка O — ортоцентр треугольника AKM . Найдите отношение $AO : ON$.

Задача 24. По кругу записаны 150 неотрицательных целых чисел, сумма которых равна n . Назовём число удачным, если оба соседних с ним числа положительны. Раз в минуту выбирают удачное число, прибавляют к нему 2, а из каждого из его соседей вычитают по 1. Процесс заканчивается, если не осталось ни одного удачного числа. Найдите наибольшее n , при котором процесс заведомо закончится независимо от начальной расстановки и выбора удачных чисел.