

Математическая игра «Первичный бульон» 7–8 классы



Задача 1. Для каждого чётного числа s от 2 до 2024 Катя рисует квадрат $s \times s$. Ира для каждого такого квадрата рисует прямоугольник с тем же периметром, одна сторона которого равна $s - 1$. На сколько суммарная площадь всех квадратов Кати больше суммарной площади всех прямоугольников Иры?

Задача 2. Два человека стоят на платформе спиной друг к другу. В момент, когда передний конец проходящего мимо них грузового поезда оказывается напротив них, они начинают идти в противоположных направлениях с одинаковой постоянной скоростью. Задний конец поезда поравнялся с первым человеком, когда тот отошёл от исходной точки на 45 м, а затем со вторым, когда тот отошёл от исходной точки на 60 м. Поезд движется с постоянной скоростью. Найдите длину поезда в метрах.

Задача 3. По кругу расположены 8 ламп. Сначала все лампы выключены. За один ход меняют состояние двух соседних ламп: включённую выключают, а выключенную включают. Сколько различных состояний восьми ламп можно получить?

Задача 4. Есть девять чашек: по одной чашке каждого из девяти сочетаний трёх цветов — красного, оранжевого, фиолетового — и трёх узоров — в горошек, в полоску, в клетку. Цены чашек равны 1, 2, ..., 9 рублям в некотором порядке. Чашки, которые одновременно не красные и не в горошек, стоят в сумме 25 рублей. Чашки, которые одновременно не оранжевые и не в полоску, стоят 22 рубля. Чашки, которые одновременно не фиолетовые и не в клетку, стоят 21 рубль. Красная чашка в горошек дешевле фиолетовой чашки в полоску. Сколько стоит оранжевая чашка в клетку?

Задача 5. Натуральное число $d > 1$ таково, что числа 332, 456 и 549 при делении на d дают один и тот же остаток. Найдите d .

Задача 6. В компании 15 школьников — мальчики и девочки. Каждый мальчик подарил каждой девочке не более одного цветка. Оказалось, что никакие три девочки не получили одинаковое число цветов. Какое наименьшее число мальчиков могло быть в компании?

Задача 7. Точки A, B, C, D расположены на одной окружности в указанном порядке. Известно, что $\angle ADB = 48^\circ$, $\angle BDC = 56^\circ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка X так, что AX — биссектриса угла BAC , а $\angle XCB = 24^\circ$. Найдите $\angle CBX$.

Задача 8. Возраст каждого из четырёх детей — целое число от 3 до 12, причём все четыре возраста различны. Каждый сделал два утверждения, причём у каждого ребёнка ровно одно из двух утверждений истинно. Первый: «Сумма наших возрастов нечётна»; «Мой возраст чётный». Второй: «Ровно одному из нас нечётное число лет»; «Произведение наших возрастов равно 810». Третий: «Произведение наших возрастов нечётно»; «Мой возраст нечётный». Четвёртый: «Мы говорили в порядке возрастания возрастов»; «Мы говорили в порядке убывания возрастов». Найдите возрасты детей в порядке их выступления.

Задача 9. В прямоугольнике $ABCD$ точка E лежит на стороне BC . Известно, что $AD = 14$, $AE = 13$, $DE = 15$. Найдите AB .

Задача 10. На доске $n \times n$ некоторые клетки покрасили в красный цвет. В каждой строке и в каждом столбце ровно 100 красных клеток. Никакие две красные клетки не имеют ни общей стороны, ни общей вершины. Найдите наименьшее возможное n .

Задача 11. На доске написано несколько чисел, среди них число 2026. Если стереть число 2026, среднее арифметическое оставшихся чисел уменьшится на 6. Если вместо этого приписать ещё одно число 2026, среднее арифметическое всех чисел увеличится на 4. Найдите сумму чисел, первоначально написанных на доске.

Задача 12. В треугольнике ABC угол ACB меньше угла $BAC = 70^\circ$. Точка X лежит на стороне AC , а точка Y — на описанной окружности треугольника ABC ; $X, Y \neq A$ и $BX = BY = BA$. Прямая XY вторично пересекает описанную окружность в точке Z . Найдите $\angle ABZ$.

Задача 13. По кругу расположено несколько домов. Миша и Паша нумеруют их по часовой стрелке числами $1, 2, \dots$, начиная с разных домов. Дом, который у Миши имеет номер 4, у Паши имеет номер 16, а дом с номером 12 у Миши имеет номер 7 у Паши. Сколько домов расположено по кругу?

Задача 14. Из доски 4×4 удалили центральный квадрат 2×2 ; осталось 12 клеток рамки. Сколькими способами можно выбрать четыре клетки так, чтобы на каждой из четырёх сторон рамки была выбрана хотя бы одна клетка? Угловая клетка относится сразу к двум сторонам.

Задача 15. В вершинах правильного 100-угольника расставили числа $1, 2, \dots, 100$ по одному разу. Оказалось, что модуль разности чисел в каждой паре противоположных вершин равен одному и тому же числу n . Найдите сумму всех возможных значений n .

Задача 16. Собрались 20 аборигенов. Каждый из них — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. На лбу у каждого записано рациональное число; все 20 чисел различны. Каждый абориген, обращаясь к остальным, произнёс: «Среди вас найдутся трое, у которых сумма чисел на лбах равна 100». При каких количествах рыцарей среди собравшихся это возможно?

Задача 17. Из точки $(0, 0)$ по линиям клетчатой бумаги проводят две ломаные. Красная ломаная всё время повторяет два шага: 1 вправо, затем 1 вверх. Синяя ломаная всё время повторяет: 2 вверх, затем 2 вправо. После 2026-й точки встречи, не считая начала, построение остановили. Найдите суммарную площадь всех ограниченных областей, образованных этими ломаными.

Задача 18. Даны вещественные числа $a < b < c < d$. Обозначим $x = ab + cd$, $y = bc + ad$, $z = ac + bd$. Расположите выражения x, y, z в порядке возрастания.

Задача 19. Сколькими нулями оканчивается целое число $\frac{2026!}{1000! \cdot (513!)^2}$?

Задача 20. В треугольнике ABC известны $AB = 85$, $BC = 160$, $CA = 103$. Биссектриса угла ABC пересекает AC в точке D . Через A провели прямую, перпендикулярную BD ; она пересекает BD в точке M , а BC — в точке P . Через A провели также прямую, перпендикулярную биссектрисе угла ACB ; точку её пересечения с этой биссектрисой обозначили N . Найдите MN .

Задача 21. Десять кружков расположены треугольником: в нижнем ряду 4 кружка, выше — 3, затем 2 и 1 кружок. Каждый кружок красят в один из трёх цветов. В каждом треугольнике из кружка и двух соседних кружков непосредственно под ним цвета либо все одинаковы, либо все различны. Сколько существует раскрасок?

Задача 22. Какое наибольшее количество натуральных чисел можно выбрать так, чтобы положительная разность любых двух выбранных чисел была целой степенью двойки?

Задача 23. Последовательность положительных целых чисел начинается с $a_1 = c$. Если a_n — точный квадрат, то $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, а иначе $a_{n+1} = a_n + 3$. Для скольких значений c от 1 до 2026 ни разу не окажется, что следующий член меньше предыдущего?

Задача 24. Вещественные числа x и y удовлетворяют равенствам $x^2 = 2x + y$ и $y^2 = 2y + x$. Найдите сумму всех возможных значений $x + y$.