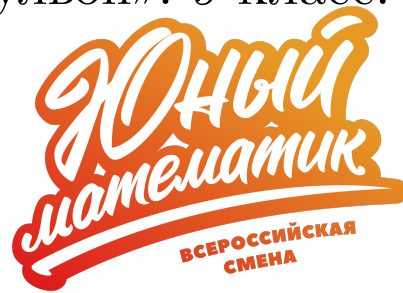


Математическая игра «Первичный бульон». 9 класс.

Решения и ответы



Задача 1. Какое наименьшее натуральное число нужно прибавить к $3^{13} + 9^{13}$, чтобы получился квадрат натурального числа?

Ответ. 1594324

Решение. Положим $a = 3^{13}$. Тогда $9^{13} = a^2$, поэтому данное число равно $a^2 + a$. Имеем

$$a^2 < a^2 + a < (a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1.$$

Значит, ближайший больший квадрат равен $(a + 1)^2$, и нужно прибавить

$$(a + 1)^2 - (a^2 + a) = a + 1 = 3^{13} + 1 = 1594324.$$

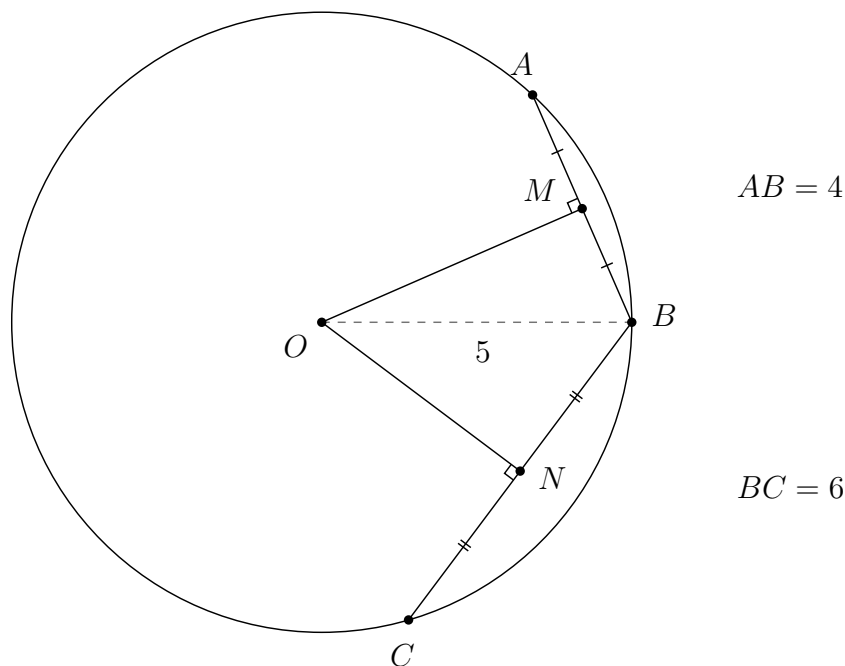
Задача 2. Точки A , B и C лежат на окружности радиуса 5 с центром O . Известно, что $AB = 4$, $BC = 6$, а точки A и C лежат по разные стороны от прямой OB . Точки M и N — середины хорд AB и BC соответственно. Площадь четырёхугольника $OMBN$ равна $a + \sqrt{b}$, где a и b — натуральные числа. Найдите a и b .

Ответ. $a = 6$, $b = 21$

Решение. Радиус, проведённый к середине хорды, перпендикулярен хорде. Поэтому $BM = 2$ и $OM = \sqrt{21}$; аналогично $BN = 3$ и $ON = 4$. Точки M и N лежат по разные стороны от OB , поэтому площадь четырёхугольника $OMBN$ равна сумме площадей прямоугольных треугольников OMB и ONB :

$$S_{OMBN} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{21} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 + \sqrt{21}.$$

Следовательно, $a = 6$, $b = 21$.



Задача 3. В ряд лежат 18 красных и зелёных яблок. Среди любых 12 последовательных яблок не менее 7 зелёных. Сколькими способами можно составить такой ряд, если зелёных яблок всего не более 8?

Ответ. 21

Решение. Обозначим через L , M и R количества зелёных яблок соответственно на местах 1–6, 7–12 и 13–18. Из условий для первых и последних 12 мест имеем $L + M \geq 7$ и $M + R \geq 7$, а всего $L + M + R \leq 8$. Поэтому $L + 2M + R \geq 14$, откуда $M \geq 6$. Так как средних мест ровно шесть, $M = 6$, а затем $L = R = 1$.

Пусть дополнительные зелёные яблоки стоят на местах i и j , где $1 \leq i \leq 6$ и $13 \leq j \leq 18$. Любые 12 последовательных мест содержат все шесть средних зелёных яблок, поэтому в каждом таком блоке должен находиться хотя бы один из i и j . Это равносильно условию $j - i \leq 12$. Для $i = 1, 2, \dots, 6$ имеется соответственно 1, 2, $\dots$, 6 возможных значений j . Поэтому число рядов равно

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Задача 4. В однокруговом турнире участвует 21 команда. В некоторый момент каждая команда сыграла либо 18, либо 19 матчей, причём хотя бы одна команда сыграла 19 матчей. Соединим две команды ребром, если им ещё предстоит сыграть друг с другом. Полученный граф оказался связным. Сколько матчей уже сыграно?

Ответ. 190

Решение. У каждой команды 20 соперников, поэтому в графе несыгранных матчей степень каждой вершины равна 1 или 2. Связный конечный граф, в котором степень каждой вершины равна 1 или 2, является либо циклом, либо путём. Цикл невозможен, поскольку хотя бы одна команда сыграла 19 матчей, то есть соответствующая вершина имеет степень 1. Значит, несыгранные матчи образуют путь на 21 вершине, а в нём 20 рёбер.

Всего в однокруговом турнире должно быть

$$C_{21}^2 = 210$$

матчей, поэтому уже сыграно $210 - 20 = 190$.

Задача 5. В коробке 6000 фишек, каждая красная или синяя. Одновременно 6% синих фишек перекрасили в красный цвет, а 10% красных — в синий. После перекрашивания количество красных фишек оказалось таким же, как до него. Сколько красных фишек было первоначально?

Ответ. 2250

Решение. Пусть первоначально было x красных фишек, тогда синих было $6000 - x$. Число красных фишек не изменилось, значит, число синих фишек, перекрашенных в красный цвет, равно числу красных фишек, перекрашенных в синий:

$$0,06(6000 - x) = 0,1x.$$

Отсюда $360 = 0,16x$, поэтому $x = 2250$.

Задача 6. Есть 12 гирь массами 1, 2, $\dots$, 12 кг. Их разделили на три группы по четыре гири. Сумма масс гирь первой группы равна 41 кг, второй — 26 кг. Найдите произведение масс четырёх гирь во второй группе.

Ответ. 1512

Решение. Общая масса всех гирь равна $1 + 2 + \dots + 12 = 78$, поэтому третья группа весит $78 - 41 - 26 = 11$ кг. Единственные четыре различные массы из 1, $\dots$, 12 с суммой 11 — это 1, 2, 3, 5. Значит, третья группа определена.

Остаются массы 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Четыре наименьшие из них дают сумму $4 + 6 + 7 + 8 = 25$. Чтобы получить 26, можно только заменить 8 на 9: замена любого более раннего элемента либо невозможна из-за повторения/уже использованной гири, либо увеличивает сумму как минимум на 2. Поэтому во второй группе лежат гири 4, 6, 7, 9 кг. Их произведение равно

$$4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 = 1512.$$

Задача 7. На доске записаны два различных положительных целых числа. Меньшее уменьшили на 20, а большее увеличили на 23; после этого произведение двух чисел не изменилось. Найдите наименьшую возможную сумму исходных чисел.

Ответ. 321

Решение. Пусть исходные числа равны $m < n$. Тогда

$$mn = (m - 20)(n + 23),$$

откуда $23m - 20n = 460$. Так как $m < n$, имеем $20n + 460 = 23m < 23n$, поэтому $n > 460/3$ и $n \geq 154$.

Из равенства $23m = 20n + 460$ следует, что $20n + 460$ делится на 23. Поскольку $460 = 20 \cdot 23$, это равносильно делимости n на 23. Наименьшее кратное 23, не меньшее 154, равно 161. Тогда

$$m = \frac{20 \cdot 161 + 460}{23} = 160.$$

Пара (160, 161) подходит, поэтому минимальная сумма равна 321.

Задача 8. Выпуклый восьмиугольник $ABCDEFGH$ равноугольный. Длины его сторон AB , BC , CD , DE , EF , FG , GH , HA по порядку равны 5, $2\sqrt{2}$, 9, $3\sqrt{2}$, 7, $4\sqrt{2}$, x , $7\sqrt{2}$. Найдите площадь восьмиугольника.

Ответ. 157

Решение. Каждый внутренний угол равноугольного восьмиугольника равен 135° , поэтому направления последовательных сторон отличаются на 45° . Направим AB горизонтально. Тогда векторы сторон можно записать как

$$(5, 0), (2, 2), (0, 9), (-3, 3), (-7, 0), (-4, -4), (0, -x), (7, -7).$$

Сумма горизонтальных составляющих равна нулю, а из суммы вертикальных составляющих получаем

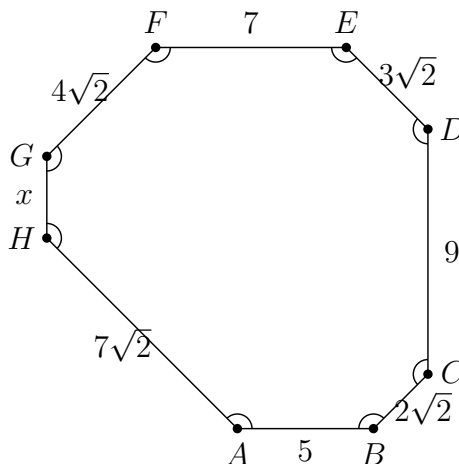
$$2 + 9 + 3 - 4 - x - 7 = 0,$$

откуда $x = 3$.

Можно взять координаты

$$A = (0, 0), B = (5, 0), C = (7, 2), D = (7, 11), E = (4, 14), F = (-3, 14), G = (-7, 10), H = (-7, 7).$$

По формуле площади многоугольника через координаты получаем $S = 157$.



Задача 9. Робот-кузнечик повторяет один и тот же цикл прыжков: 1 см вправо, 2 см вверх, 3 см влево, 4 см вниз. После n прыжков он оказался на 162 см левее и на 158 см ниже начальной точки. Найдите n .

Ответ. 323

Решение. За четыре прыжка кузнечик смещается на 2 см влево и на 2 см вниз. После 80 полных циклов, то есть после 320 прыжков, он находится на 160 см левее и на 160 см ниже начальной точки. Следующие три прыжка дают последовательно 1 см вправо, 2 см вверх и 3 см влево, поэтому после 323 прыжков положение как раз на 162 см левее и на 158 см ниже исходного.

Остатки 0, 1 и 2 по модулю 4 дают относительно конца полного цикла смещения $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(1, 2)$, поэтому другого значения n нет.

Задача 10. В стране 2000 городов, пронумерованных числами от 1 до 2000. Города с номерами $a < b$ соединены железной дорогой тогда и только тогда, когда b делится на a и не существует натурального числа c такого, что $a < c < b$, $a \mid c$ и $c \mid b$. Со сколькими городами соединён город №42?

Ответ. 18

Решение. Если $a \mid b$, то между ними нет промежуточного числа c с $a \mid c \mid b$ тогда и только тогда, когда b/a — простое число. Меньшие соседи города 42 получаются делением 42 на один из его различных простых делителей: это 21, 14 и 6, всего 3 города. Большие соседи имеют вид $42p$, где p — простое и $42p \leq 2000$, то есть $p \leq 47$. Простых чисел, не превосходящих 47, ровно 15. Поэтому всего соседей $3 + 15 = 18$.

Задача 11. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый задумал натуральное число. Первый сказал: «Моё число больше 1», второй — «Моё число больше 2», ..., десятый — «Моё число больше 10». Затем те же десять человек в некотором порядке произнесли десять фраз «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10», причём каждый произнёс ровно одну фразу. Какое наибольшее число рыцарей могло быть среди них?

Ответ. 8

Решение. Человек, сказавший в первой серии «Моё число больше 10», не может быть рыцарем: тогда его число было бы не меньше 11, а ни одна из десяти фраз второй серии не могла бы быть для него истинной. По той же причине не может быть рыцарем и человек, сказавший «Моё число больше 9»: его число было бы не меньше 10, а среди фраз второй серии нет истинной для такого числа. Значит, рыцарей не больше 8.

Восемь рыцарей возможны. Пусть первые восемь человек задумали соответственно числа 2, 3, ..., 9 и во второй серии сказали соответственно «меньше 3», «меньше 4», ..., «меньше 10». Девятый и десятый пусть оба задумали число 5 и во второй серии сказали соответственно «меньше 1» и «меньше 2». У первых восьми обе фразы истинны, у последних двух обе ложны. Значит, максимум равен 8.

Задача 12. У треугольника стороны 32, 50 и x . Существует другой, не равный ему треугольник, подобный данному, причём среди длин сторон этих двух треугольников есть два различных общих значения. Найдите сумму всех возможных значений x .

Ответ. 138,605

Решение. У исходного треугольника не может быть двух равных сторон: при коэффициенте подобия $k \neq 1$ одна и та же длина не может сохраниться дважды, поэтому для двух различных общих длин нужны три различные длины. Пусть они равны $a < b < c$.

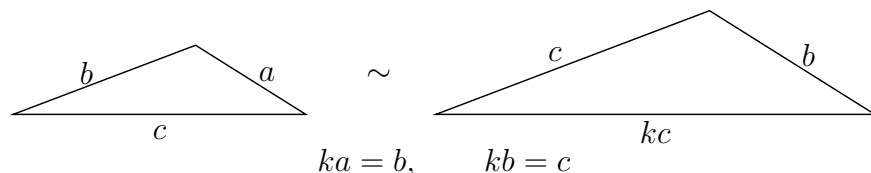
Если $k > 1$, то наименьшая общая длина получается из a , а большая — из b ; значит, $ka = b$ и $kb = c$. Поэтому

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b},$$

то есть $b^2 = ac$. При $k < 1$ получается то же условие в обратном направлении. Следовательно, три длины образуют геометрическую прогрессию.

Числа 32 и 50 могут занимать три пары позиций. Если $a = 32$, $b = 50$, то $c = 50^2/32 = 625/8$. Если $a = 32$, $c = 50$, то $b = \sqrt{32 \cdot 50} = 40$. Если $b = 32$, $c = 50$, то $a = 32^2/50 = 512/25$. Во всех трёх случаях выполняются неравенства треугольника. Поэтому

$$\sum x = \frac{625}{8} + 40 + \frac{512}{25} = \frac{27721}{200} = 138,605.$$



Задача 13. Четыре различных целых числа a, b, c, d выбраны из чисел $1, 2, \dots, 10$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $ac + bd - ad - bc$.

Ответ. 64

Решение. Имеем

$$ac + bd - ad - bc = (a - b)(c - d).$$

Если модуль одной из разностей равен 9, то использованы числа 1 и 10, поэтому из оставшихся чисел модуль второй разности не превосходит 7, и произведение не больше 63. Если обе разности по модулю не превосходят 8, произведение не больше 64.

Значение 64 достигается, например, при $a = 10, b = 2, c = 9, d = 1$: тогда $(a - b)(c - d) = 8 \cdot 8 = 64$.

Задача 14. Прямоугольный лист имеет размеры 965×930 . От него последовательно отрезают полосы ширины $1, 2, 3, \dots$, каждый раз вдоль следующей стороны прямоугольника по часовой стрелке; первая полоса ширины 1 отрезается вдоль стороны длины 965. Каждая полоса проходит по всей длине соответствующей стороны текущего прямоугольника. Процесс прекращается, когда очередную полосу отрезать невозможно. Найдите площадь оставшегося прямоугольника.

Ответ. 1050

Решение. Полосы нечётной ширины уменьшают сторону 930. После первых 30 нечётных полос суммарно отрезано

$$1 + 3 + \dots + 59 = 30^2 = 900,$$

поэтому от этой стороны остаётся 30.

Полосы чётной ширины уменьшают сторону 965. После первых 30 чётных полос суммарно отрезано

$$2 + 4 + \dots + 60 = 30 \cdot 31 = 930,$$

поэтому от этой стороны остаётся 35. Значит, после 60 полос остаётся прямоугольник 30×35 площадью 1050. Следующая полоса имеет ширину 61 и должна уменьшать сторону длины 30, поэтому отрезать её уже невозможно.

Задача 15. Из доски 4×4 удалили центральный квадрат 2×2 ; осталось 12 клеток рамки. Сколькими способами можно выбрать четыре клетки так, чтобы на каждой из четырёх сторон рамки была выбрана хотя бы одна клетка, причём ровно две выбранные клетки являются угловыми?

Ответ. 108

Решение. Сначала выберем две угловые клетки. Если они противоположные, то уже представлены все четыре стороны рамки. Противоположных пар углов 2, а оставшиеся две клетки можно выбрать любыми из 8 неугловых: получаем

$$2 \cdot C_8^2 = 56$$

способов.

Если выбранные углы соседние, они лежат на трёх сторонах рамки, и среди двух выбранных неугловых клеток должна быть хотя бы одна клетка четвёртой стороны. Соседних пар углов 4. На недостающей стороне находятся 2 неугловые клетки, поэтому для фиксированной пары углов подходит

$$C_8^2 - C_6^2 = 28 - 15 = 13$$

вариантов. Получаем ещё $4 \cdot 13 = 52$ способа. Итого $56 + 52 = 108$.

Задача 16. Числа $1, 2, \dots, 2k$ разбили на две группы по k чисел так, что любые два числа из одной группы имеют не более двух различных общих простых делителей. Найдите наибольшее возможное k .

Ответ. 44

Решение. Если $k \geq 45$, среди чисел присутствуют 30, 60 и 90. Любые два из них имеют три различных общих простых делителя 2, 3 и 5. По принципу Дирихле какие-то два из этих трёх чисел попадут в одну группу, что невозможно. Значит, $k \leq 44$.

Покажем, что $k = 44$ возможно: возьмём группы $\{1, \dots, 44\}$ и $\{45, \dots, 88\}$. Если два числа $x < y \leq 88$ имеют хотя бы три различных общих простых делителя p, q, r , то оба кратны $pqr \geq 30$. Так как $3pqr \geq 90 > 88$, среди чисел до 88 имеются не более двух кратных pqr . Если их два, это pqr и $2pqr$; при этом $2pqr \leq 88$ влечёт $pqr \leq 44$. Следовательно, эти два числа лежат в разных группах. Значит, $k = 44$ достигается.

Задача 17. Женя и Сеня разделили с остатком одно и то же натуральное число: Женя на 12, Сеня на 13. Сумма неполного частного, полученного Женей, и остатка, полученного Сеней, равна 14. Найдите остаток, полученный Женей.

Ответ. 1

Решение. Пусть

$$N = 12a + r = 13b + s,$$

где $0 \leq r \leq 11$ и $0 \leq s \leq 12$. По условию $a + s = 14$, поэтому $s = 14 - a$. Тогда

$$12a + r = 13b + 14 - a,$$

откуда

$$13(a - b) = 14 - r.$$

Число $14 - r$ лежит от 3 до 14 и делится на 13, поэтому оно равно 13. Значит, $r = 1$.

Возможность существует, например, при $N = 25$: при делении на 12 получаются частное 2 и остаток 1, а при делении на 13 — частное 1 и остаток 12; $2 + 12 = 14$.

Задача 18. Изначально во всех клетках таблицы 3×3 записаны нули. За один ход разрешается либо прибавить 1 ко всем трём числам некоторой строки, либо прибавить 2 ко всем трём числам некоторого столбца. После нескольких ходов получилась таблица

$$\begin{array}{ccc} 7 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \end{array}.$$

Сколько всего ходов было сделано?

Ответ. 11

Решение. Во втором столбце есть число 1, значит, к этому столбцу ни разу не прибавляли 2. Поэтому числа 1, 3, 2 во втором столбце показывают количества ходов со строками: всего 6. После этих ходов первый столбец нужно увеличить ещё на 6, то есть сделать 3 столбцовых хода, а третий — на 4, то есть ещё 2. Итого $6 + 3 + 2 = 11$.

Задача 19. В комнате находятся 8 девочек и несколько мальчиков. Каждая девочка вручила по одной булочке каждому знакомому мальчику, а каждый мальчик — по две булочки каждой незнакомой девочке. Всего раздали 100 булочек. Известно также, что каждый мальчик знаком с одинаковым числом девочек. Сколько мальчиков было в комнате?

Ответ. 10

Решение. Пусть мальчиков m , а каждый из них знаком с d девочками. Девочки раздали md булочек. Каждый мальчик не знаком с $8 - d$ девочками и поэтому раздал $2(8 - d)$ булочек. Всего раздали

$$m(d + 2(8 - d)) = m(16 - d) = 100$$

булочек. Так как $0 \leq d \leq 8$, число $16 - d$ является целым делителем 100 от 8 до 16. Единственный такой делитель — 10. Следовательно, $m = 10$ и $d = 6$.

Возможность существует: например, пусть все десять мальчиков знакомы с одними и теми же шестью девочками.

Задача 20. В четырёхугольнике $ABCD$ известны длины $AB = 5$, $BC = 3$, $CD = 10$. Внутренний угол при вершине B равен 240° , а при вершине C — 60° . Найдите AD .

Ответ. 13

Решение. Так как внутренний угол при B равен 240° , меньший угол между лучами BA и BC равен 120° . По теореме косинусов в треугольнике ABC получаем

$$AC^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos 120^\circ = 49,$$

поэтому $AC = 7$.

Обозначим $\gamma = \angle BCA$. Тогда

$$\cos \gamma = \frac{3^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{11}{14}, \quad \sin \gamma = \frac{5 \sin 120^\circ}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

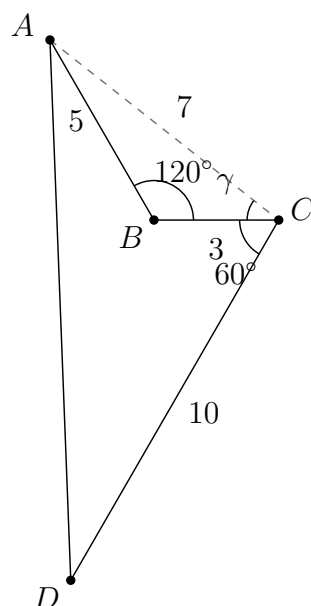
В требуемой конфигурации лучи CA и CD лежат по разные стороны от прямой CB , поэтому $\angle ACD = \gamma + 60^\circ$. Следовательно,

$$\cos \angle ACD = \frac{11}{14} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{14} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{7}.$$

По теореме косинусов в треугольнике ACD :

$$AD^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \left(-\frac{1}{7}\right) = 169.$$

Значит, $AD = 13$.



Задача 21. На координатной плоскости дан треугольник с вершинами $A(0; 0)$, $B(2026; 0)$, $C(1; 2025)$. Сколько точек с целыми координатами лежит строго внутри этого треугольника?

Ответ. 2049300

Решение. Рассмотрим узлы с ординатой k , где $1 \leq k \leq 2024$. Сторона AC имеет уравнение

$$x = \frac{y}{2025},$$

а сторона BC — уравнение $x + y = 2026$. Поэтому для внутренней точки (x, k) выполняется

$$\frac{k}{2025} < x < 2026 - k.$$

Поскольку $0 < k/2025 < 1$, целые значения x равны

$$1, 2, \dots, 2025 - k.$$

Значит, на уровне $y = k$ имеется $2025 - k$ внутренних узлов. Всего их

$$2024 + 2023 + \dots + 1 = \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 2049300.$$

Задача 22. В ящике лежат n носков, среди них b чёрных. Два носка случайно и равновероятно выбирают без возвращения. Вероятность выбрать два чёрных носка равна $\frac{2}{15}$. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ. 10

Решение. Имеем

$$\frac{b(b-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{15},$$

то есть $15b(b-1) = 2n(n-1)$. Следовательно, 15 делит $n(n-1)$. При $2 \leq n < 10$ это возможно только для $n = 6$. Тогда $b(b-1) = 4$, что невозможно для целого b . При $n = 10$ получаем $b(b-1) = 12$, откуда $b = 4$. Значит, минимальное n равно 10.

Задача 23. Последовательность из 11 положительных действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ удовлетворяет условиям $a_1 = 4$, $a_{11} = 1024$ и

$$a_n + a_{n-1} = \frac{5}{2} \sqrt{a_n a_{n-1}}$$

для каждого $n = 2, \dots, 11$. Сколько существует таких последовательностей?

Ответ. 120

Решение. Пусть два соседних члена равны x и y . Тогда

$$x + y = \frac{5}{2} \sqrt{xy},$$

поэтому $4(x+y)^2 = 25xy$, откуда

$$4x^2 - 17xy + 4y^2 = 0.$$

Это равносильно

$$(4x - y)(x - 4y) = 0,$$

значит, каждый следующий член либо в 4 раза больше предыдущего, либо в 4 раза меньше. От a_1 до a_{11} делается 10 переходов. Пусть u из них — умножения на 4, а d — деления на 4. Тогда

$$u + d = 10, \quad 4^{u-d} = \frac{1024}{4} = 256 = 4^4.$$

Следовательно, $u - d = 4$, откуда $u = 7$, $d = 3$. Нужно выбрать три из десяти переходов, на которых происходит деление, поэтому число последовательностей равно

$$C_{10}^3 = 120.$$

Задача 24. Простое число p и положительные целые числа m, n удовлетворяют равенству

$$p^n + 3600 = m^2.$$

Найдите все возможные значения m .

Ответ. 61, 65, 68

Решение. Имеем

$$p^n = m^2 - 60^2 = (m - 60)(m + 60).$$

Так как $p^n > 0$, имеем $m > 60$. Если $m - 60 = 1$, то $m = 61$ и $m + 60 = 121 = 11^2$, поэтому получаем решение $m = 61$.

Пусть теперь $m - 60 > 1$. Оба положительных множителя $m - 60$ и $m + 60$ являются степенями одного простого p , поэтому p делит их разность 120. Значит, $p \in \{2, 3, 5\}$.

Пусть $m - 60 = p^a$, $m + 60 = p^b$, где $1 \leq a < b$. Тогда

$$p^a(p^{b-a} - 1) = 120.$$

При $p = 2$ второй множитель нечётен, поэтому $a = 3$; далее $2^{b-a} - 1 = 15$, откуда $b - a = 4$ и $m = 68$. При $p = 3$ получаем $a = 1$ и $3^{b-a} - 1 = 40$, что невозможно. При $p = 5$ получаем $a = 1$ и $5^{b-a} - 1 = 24$, откуда $b - a = 2$ и $m = 65$.

Итак, возможны ровно $m = 61, 65, 68$.