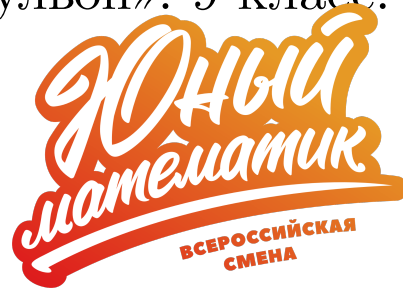


Математическая игра «Первичный бульон». 9 класс.

Условия



Задача 1. Какое наименьшее натуральное число нужно прибавить к $3^{13} + 9^{13}$, чтобы получился квадрат натурального числа?

Задача 2. Точки A , B и C лежат на окружности радиуса 5 с центром O . Известно, что $AB = 4$, $BC = 6$, а точки A и C лежат по разные стороны от прямой OB . Точки M и N — середины хорд AB и BC соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMBN$.

Задача 3. В ряд лежат 18 красных и зелёных яблок. Среди любых 12 последовательных яблок не менее 7 зелёных. Сколькими способами можно составить такой ряд, если зелёных яблок всего не более 8?

Задача 4. В однокруговом турнире участвует 21 команда. В некоторый момент каждая команда сыграла либо 18, либо 19 матчей, причём хотя бы одна команда сыграла 19 матчей. Соединим две команды ребром, если им ещё предстоит сыграть друг с другом. Полученный граф оказался связным. Сколько матчей уже сыграно?

Задача 5. В коробке 6000 фишек, каждая красная или синяя. Одновременно 6% синих фишек перекрасили в красный цвет, а 10% красных — в синий. После перекрашивания количество красных фишек оказалось таким же, как до него. Сколько красных фишек было первоначально?

Задача 6. Есть 12 гирь массами $1, 2, \dots, 12$ кг. Их разделили на три группы по четыре гири. Сумма масс гирь первой группы равна 41 кг, второй — 26 кг. Найдите произведение масс четырёх гирь во второй группе.

Задача 7. На доске записаны два различных положительных целых числа. Меньшее уменьшили на 20, а большее увеличили на 23; после этого произведение двух чисел не изменилось. Найдите наименьшую возможную сумму исходных чисел.

Задача 8. Выпуклый восьмиугольник $ABCDEFGH$ равноугольный. Длины его сторон AB , BC , CD , DE , EF , FG , GH , HA по порядку равны 5 , $2\sqrt{2}$, 9 , $3\sqrt{2}$, 7 , $4\sqrt{2}$, x , $7\sqrt{2}$. Найдите площадь восьмиугольника.

Задача 9. Робот-кузнечик повторяет один и тот же цикл прыжков: 1 см вправо, 2 см вверх, 3 см влево, 4 см вниз. После n прыжков он оказался на 162 см левее и на 158 см ниже начальной точки. Найдите n .

Задача 10. В стране 2000 городов, пронумерованных числами от 1 до 2000. Города с номерами $a < b$ соединены железной дорогой тогда и только тогда, когда b делится на a и не существует натурального числа c такого, что $a < c < b$, $a \mid c$ и $c \mid b$. Со сколькими городами соединён город №42?

Задача 11. Каждый из 10 человек — либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый задумал натуральное число. Первый сказал: «Моё число больше 1», второй — «Моё число больше 2», ..., десятый — «Моё число больше 10». Затем те же десять человек в некотором порядке произнесли десять фраз «Моё число меньше 1», «Моё число меньше 2», ..., «Моё число меньше 10», причём каждый произнёс ровно одну фразу. Какое наибольшее число рыцарей могло быть среди них?

Задача 12. У треугольника стороны 32, 50 и x . Существует другой, не равный ему треугольник, подобный данному, причём среди длин сторон этих двух треугольников есть два различных общих значения. Какие значения может принимать x ?

Задача 13. Четыре различных целых числа a, b, c, d выбраны из чисел $1, 2, \dots, 10$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $ac + bd - ad - bc$.

Задача 14. Прямоугольный лист имеет размеры 965×930 . От него последовательно отрезают полосы ширины $1, 2, 3, \dots$, каждый раз вдоль следующей стороны прямоугольника по часовой стрелке; первая полоса ширины 1 отрезается вдоль стороны длины 965. Каждая полоса проходит по всей длине соответствующей стороны текущего прямоугольника. Процесс прекращается, когда очередную полосу отрезать невозможно. Найдите площадь оставшегося прямоугольника.

Задача 15. Из доски 4×4 удалили центральный квадрат 2×2 ; осталось 12 клеток рамки. Сколькими способами можно выбрать четыре клетки так, чтобы на каждой из четырёх сторон рамки была выбрана хотя бы одна клетка, причём ровно две выбранные клетки являются угловыми?

Задача 16. Числа $1, 2, \dots, 2k$ разбили на две группы по k чисел так, что любые два числа из одной группы имеют не более двух различных общих простых делителей. Найдите наибольшее возможное k .

Задача 17. Женя и Сеня разделили с остатком одно и то же натуральное число: Женя на 12, Сеня на 13. Сумма неполного частного, полученного Женей, и остатка, полученного Сеней, равна 14. Найдите остаток, полученный Женей.

Задача 18. Изначально во всех клетках таблицы 3×3 записаны нули. За один ход разрешается либо прибавить 1 ко всем трём числам некоторой строки, либо прибавить 2 ко всем трём числам некоторого столбца. После нескольких ходов получилась таблица

$$\begin{array}{ccc} 7 & 1 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 6 \end{array}.$$

Сколько всего ходов было сделано?

Задача 19. В комнате находятся 8 девочек и несколько мальчиков. Каждая девочка вручила по одной булочке каждому знакомому мальчику, а каждый мальчик — по две булочки каждой незнакомой девочке. Всего раздали 100 булочек. Известно также, что каждый мальчик знаком с одинаковым числом девочек. Сколько мальчиков было в комнате?

Задача 20. В четырёхугольнике $ABCD$ известны длины $AB = 5$, $BC = 3$, $CD = 10$. Внутренний угол при вершине B равен 240° , а при вершине C — 60° . Найдите AD .

Задача 21. На координатной плоскости дан треугольник с вершинами $A(0; 0)$, $B(2026; 0)$, $C(1; 2025)$. Сколько точек с целыми координатами лежит строго внутри этого треугольника?

Задача 22. В ящике лежат n носков, среди них b чёрных. Два носка случайно и равновероятно выбирают без возвращения. Вероятность выбрать два чёрных носка равна $\frac{2}{15}$. Найдите наименьшее возможное значение n .

Задача 23. Последовательность из 11 положительных действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ удовлетворяет условиям $a_1 = 4$, $a_{11} = 1024$ и

$$a_n + a_{n-1} = \frac{5}{2} \sqrt{a_n a_{n-1}}$$

для каждого $n = 2, \dots, 11$. Сколько существует таких последовательностей?

Задача 24. Простое число p и положительные целые числа m, n удовлетворяют равенству

$$p^n + 3600 = m^2.$$

Найдите все возможные значения m .