

Математическая игра «Тетрис». 10–11 классы.

Решения и ответы



Задача 1. В тесте четыре задачи. Тема каждой задачи независимо и равновероятно выбирается из четырёх: алгебра, комбинаторика, геометрия, теория чисел. Известно, что среди четырёх задач есть хотя бы по одной задаче по алгебре, комбинаторике и геометрии. Вероятность того, что среди задач есть хотя бы одна задача по теории чисел, равна $\frac{m}{n}$, где дробь несократима. Найдите $m + n$.

Решение. Если теория чисел встречается, то все четыре темы встречаются по одному разу: это даёт $4! = 24$ последовательности тем. Если теории чисел нет, одна из трёх остальных тем повторяется: повторяющуюся тему можно выбрать 3 способами, а расположить четыре темы — $4!/2! = 12$ способами. Получаем 36 последовательностей. Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{24}{24 + 36} = \frac{2}{5},$$

и $m + n = 7$.

Ответ. 7.

Задача 2. Кирилл загадал натуральное число N , в десятичной записи которого все цифры различны и ни одна из них не равна нулю. Он вычислил сумму его цифр S и произведение его цифр P . Оказалось, что если к записи числа S справа приписать запись числа P , то получится число N . Найдите N .

Решение. Так как в записи N могут встречаться только цифры $1, 2, \dots, 9$, имеем $S \leq 1 + 2 + \dots + 9 = 45$. Число S не может быть однозначным: тогда первая цифра N уже равнялась бы сумме всех его цифр. Значит, S двузначно; запишем $S = 10a + b$, где a, b — первые две цифры N . Сумма остальных цифр равна

$$S - a - b = 9a,$$

поэтому $a \leq 4$. Остальная часть записи числа N есть число P ; если перемножить цифры числа P , получим $P/(ab)$. Следовательно,

$$P = ab \cdot (\text{произведение цифр числа } P), \quad \text{сумма цифр числа } P = 9a.$$

Перебирая $a = 1, 2, 3, 4$ и требуя, чтобы цифры числа P были различными и ненулевыми, получаем только

$$(a, b, P) = (1, 2, 36), \quad (1, 9, 135), \quad (2, 6, 1296).$$

В двух последних случаях среди цифр числа P встречается одна из первых двух цифр N , что запрещено. Остаётся $S = 12$, $P = 36$, то есть $N = 1236$.

Ответ. 1236.

Задача 3. Точка E лежит на стороне AB прямоугольника $ABCD$, причём $\angle CED = 90^\circ$. Точки O, P, Q — центры окружностей, описанных около треугольников ADE, BCE и CDE соответственно. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если $OQ = 20$, $OP = 29$.

Решение. Треугольники ADE, BCE и CDE прямоугольные, поэтому O, P, Q — середины их гипотенуз DE, CE, CD соответственно. В треугольнике CDE отрезок OQ — средняя линия, поэтому $CE = 2OQ = 40$. Аналогично $OP = CD/2$, значит, $CD = 58$. Тогда

$$DE = \sqrt{58^2 - 40^2} = 42.$$

Площадь треугольника CDE равна $40 \cdot 42/2 = 840$. Его основание CD совпадает со стороной прямоугольника, а высота равна высоте прямоугольника, поэтому площадь прямоугольника вдвое больше и равна 1680.

$$15^2 \cdot 6 + 10^2 \cdot 9 = 15(AD^2 + 54),$$

откуда $AD^2 = 96$.

Тот же результат сразу даёт формула длины биссектрисы:

$$AD^2 = AB \cdot AC \left(1 - \frac{BC^2}{(AB + AC)^2} \right) = 96.$$

Ответ. 96.

Задача 7. На острове расположено несколько деревень, некоторые пары деревень соединены дорогами. Между любыми двумя деревнями существует ровно один путь по дорогам. Ровно из четырёх деревень выходит больше одной дороги: из них выходит 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно. Из каждой другой деревни выходит ровно одна дорога. Сколько всего деревень на острове?

Решение. Дорожная сеть является деревом. Пусть деревень степени 1 имеется k . Тогда всего вершин $k + 4$, а сумма степеней равна $k + 3 + 4 + 5 + 7 = k + 19$. Получаем:

$$k + 19 = 2(k + 4 - 1).$$

Отсюда $k = 13$, а всего деревень $13 + 4 = 17$.

Ответ. 17.

Задача 8. Числа α, β, γ — три действительных корня уравнения $x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 0$. Известно, что $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} + \frac{1}{\gamma+1} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая положительная дробь. Найдите $m + n$.

Решение. Пусть $F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. Так как

$$F(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma),$$

то после дифференцирования

$$F'(x) = (x - \beta)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \gamma) + (x - \alpha)(x - \beta).$$

Делим на $F(x)$ и получаем

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x - \alpha} + \frac{1}{x - \beta} + \frac{1}{x - \gamma}.$$

При $x = -1$ поэтому

$$\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\beta + 1} + \frac{1}{\gamma + 1} = -\frac{F'(-1)}{F(-1)} = -\frac{24}{-17} = \frac{24}{17}.$$

Значит, $m + n = 41$.

Второе решение. По теореме Виета

$$\alpha + \beta + \gamma = 6, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 9, \quad \alpha\beta\gamma = 1.$$

Знаменатель общей дроби равен

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) = 1 + 6 + 9 + 1 = 17,$$

а числитель равен

$$(\beta + 1)(\gamma + 1) + (\gamma + 1)(\alpha + 1) + (\alpha + 1)(\beta + 1) = 9 + 2 \cdot 6 + 3 = 24.$$

Следовательно, дробь равна $24/17$, и $m + n = 41$.

Ответ. 41.

Задача 9. Все восьмибуквенные слова, в которых каждая из букв А, Б, В, Г встречается ровно два раза, расположили в лексикографическом порядке, в котором А идёт раньше Б,

Б — раньше В, а В — раньше Г. На каком месте стоит слово БАГВГВАБ, если нумерация начинается с 1?

Решение. Считаем слова, стоящие раньше БАГВГВАБ. На первом месте вместо Б может стоять А: таких слов

$$\frac{7!}{2!2!2!} = 630.$$

После префикса БА третья буква целевого слова — Г. Если поставить вместо неё А, Б или В, получаем соответственно

$$\frac{5!}{2!2!} = 30, \quad \frac{5!}{2!2!} = 30, \quad \frac{5!}{2!} = 60,$$

то есть ещё 120 слов. После префикса БАГ четвёртая буква — В; вместо неё можно поставить А или Б, и каждый выбор даёт по $4!/2! = 12$ слов, всего 24. После БАГВ на пятом месте вместо Г можно поставить А, Б или В: каждый вариант даёт $3! = 6$ слов, всего 18. Наконец, после БАГВГ на шестом месте вместо В можно поставить А или Б, и каждый вариант даёт $2! = 2$ слова, всего 4. Поэтому номер слова равен

$$1 + 630 + 120 + 24 + 18 + 4 = 797.$$

Ответ. 797.

Задача 10. Найдите наибольшее натуральное число m , такое что $p^4 - 1$ делится на m для любого простого числа $p > 5$.

Решение. Для любого простого $p > 5$ число p нечётно. Поэтому $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$, откуда $p^4 \equiv 1 \pmod{16}$. Кроме того, $p \not\equiv 3$, значит, $p \equiv \pm 1 \pmod{3}$ и $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Наконец, $p \neq 5$, поэтому по малой теореме Ферма

$$p^4 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Числа 16, 3, 5 попарно взаимно просты, следовательно, $240 = 16 \cdot 3 \cdot 5$ делит $p^4 - 1$ для любого простого $p > 5$.

Больше общего делителя быть не может: при $p = 7$ и $p = 11$

$$7^4 - 1 = 240 \cdot 10, \quad 11^4 - 1 = 240 \cdot 61,$$

а числа 10 и 61 взаимно просты. Значит, наибольшее возможное m равно 240.

Ответ. 240.

Задача 11. Треугольник ABC равносторонний. Точка D лежит на стороне BC , причём $BD = 1$, $DC = 4$. Точки E и F лежат соответственно на лучах AC и AB , а D — середина отрезка EF . Найдите EF^2 .

Решение. Сторона равностороннего треугольника равна 5. Возьмём координаты

$$A = (0, 0), \quad B = (5, 0), \quad C = \left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right).$$

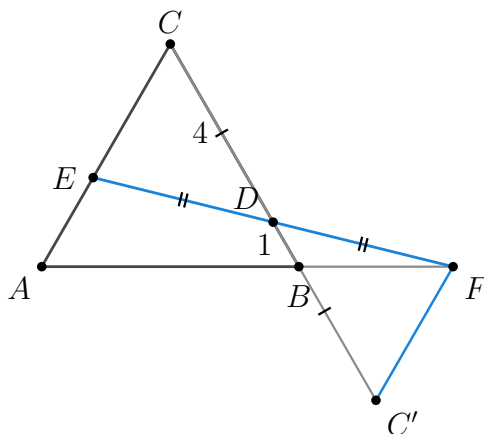
Так как $BD : DC = 1 : 4$, получаем $D = (9/2, \sqrt{3}/2)$. Пусть E лежит на AC , а F — на луче AB . Из того, что D — середина EF , следует $E = (1, \sqrt{3})$ и $F = (8, 0)$. Поэтому

$$EF^2 = 7^2 + (\sqrt{3})^2 = 52.$$

Второе решение. Отразим C относительно D и обозначим полученную точку C' . Тогда D — середина и CC' , и EF , поэтому четырёхугольник $CEC'F$ — параллелограмм. Следовательно, $C'F \parallel CE \parallel AC$. Так как $BC = 5$, $BD = 1$, точка C' лежит на продолжении BC за B и $BC' = 3$. Из $C'F \parallel AC$ следует, что треугольник BFC' равносторонний, поэтому $BF = 3$. В треугольнике BDF имеем $BD = 1$, $BF = 3$ и $\angle DBF = 120^\circ$, поэтому

$$DF^2 = 1 + 9 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cos 120^\circ = 13.$$

Так как D — середина EF , получаем $EF^2 = 4DF^2 = 52$.



Ответ. 52.

Задача 12. Семь карточек с числами $1, 2, \dots, 7$ лежат в ряд в некотором порядке. За один ход разрешается поменять местами две соседние карточки. Для скольких начальных расстановок можно за несколько ходов получить порядок $1, 2, \dots, 7$ так, чтобы карточка с числом 4 участвовала не более чем в одном обмене?

Решение. Рассмотрим пары карточки 4 с каждой из остальных карточек. Если такая пара образует инверсию относительно порядка $1, 2, \dots, 7$, то при любой сортировке соседними обменами относительный порядок этих двух карточек должен измениться, а значит, карточка 4 обязана хотя бы один раз обменяться с этой карточкой. И наоборот, стандартной сортировкой соседними обменами можно устранить каждую инверсию ровно одним обменом соответствующей пары. Поэтому условие задачи равносильно тому, что инверсий с карточкой 4 не больше одной.

Пусть слева от 4 стоят a чисел из $1, 2, 3$ и b чисел из $5, 6, 7$. Тогда число инверсий с 4 равно $b + (3 - a)$. Возможны только $(a, b) = (3, 0), (3, 1), (2, 0)$. Число расстановок соответственно равно

$$3!3! = 36, \quad 3 \cdot 4!2! = 144, \quad 3 \cdot 2!4! = 144.$$

Итого $36 + 144 + 144 = 324$.

Ответ. 324.

Задача 13. Неотрицательные целые числа a, b, c, d удовлетворяют равенствам $ab + cd = 31$ и $ac + bd = 29$. Найдите наименьшее возможное значение $a + b + c + d$.

Решение. Складывая равенства, получаем

$$(a + d)(b + c) = 60,$$

а вычитая второе из первого,

$$(a - d)(b - c) = 2.$$

Числа $a + d$ и $a - d$ одной чётности, как и $b + c$ и $b - c$. Поэтому множители $a + d$ и $b + c$ не могут быть оба чётными. Минимальная сумма двух множителей с произведением 60 равна 16 и достигается только для 6 и 10, но эта пара не подходит. Следующая сумма равна $5 + 12 = 17$. Она достигается, например, при $(a, b, c, d) = (3, 7, 5, 2)$, и оба исходных равенства выполняются.

Ответ. 17.

Задача 14. В треугольнике ABC известны $AB = 6$, $AC = 9$, $BC = 7$. Касательная к окружности, описанной около треугольника ABC , в точке A пересекает прямую BC в точке T . Длина BT равна $\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая положительная дробь. Найдите $m + n$.

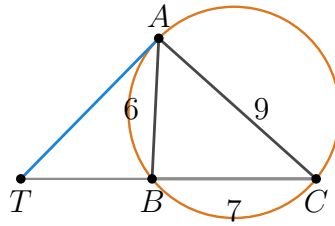
Решение. По теореме о касательной и хорде и теореме синусов для треугольников ABT и ACT получаем

$$\frac{BT}{CT} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Так как это отношение меньше 1, точка T лежит на продолжении BC за B , поэтому $CT = BT + 7$. Если $BT = t$, то

$$\frac{t}{t+7} = \frac{4}{9},$$

откуда $t = 28/5$. Следовательно, $m + n = 28 + 5 = 33$.



Ответ. 33.

Задача 15. Натуральное число N имеет ровно 72 положительных делителя. Среди них 54 делятся на 2, а 48 — на 3. Сколько положительных делителей числа N делятся на 6?

Решение. Пусть $N = 2^a 3^b M$, где M взаимно просто с 6 и имеет t делителей. Тогда

$$(a+1)(b+1)t = 72,$$

а делителей, кратных 2, имеется $a(b+1)t = 54$. Деление равенств даёт $a/(a+1) = 3/4$, поэтому $a = 3$. Аналогично из числа делителей, кратных 3, получаем $b/(b+1) = 2/3$, то есть $b = 2$. Тогда $t = 72/(4 \cdot 3) = 6$, а делителей, кратных 6, ровно $abt = 3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$.

Ответ. 36.

Задача 16. Прямоугольный лист бумаги согнули по прямой так, что одна его вершина совместилась с противоположной. После сгиба получилась пятиугольная фигура: 20% её площади покрыто одним слоем бумаги, а 80% — двумя слоями. Квадрат отношения длины большей стороны исходного прямоугольника к длине меньшей равен $\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая положительная дробь. Найдите $m + n$.

Решение. Пусть стороны прямоугольника равны $a > b$, а его площадь $S = ab$. Если площадь полученной фигуры равна F , то с учётом слоёв

$$S = 0.2F + 2 \cdot 0.8F = 1.8F.$$

Значит, $F = 5S/9$, а площадь, покрытая одним слоем, равна $F/5 = S/9$.

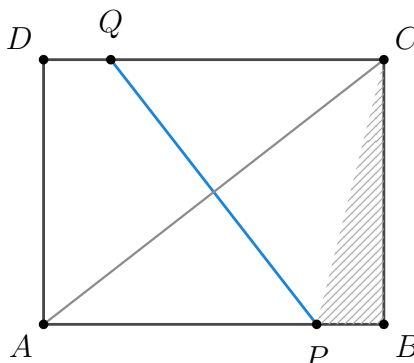
Обозначим вершины прямоугольника A, B, C, D , где $AB = a$, $AD = b$, и сгибаем A в C . Линия сгиба — серединный перпендикуляр к AC ; пусть она пересекает AB в P . Из уравнения этой прямой

$$AP = \frac{a^2 + b^2}{2a}, \quad PB = \frac{a^2 - b^2}{2a}.$$

Две однослойные части переходят друг в друга при отражении относительно линии сгиба, поэтому они равновелики. Следовательно, площадь треугольника PBC равна $S/18$. Тогда

$$\frac{1}{2} \cdot PB \cdot b = \frac{ab}{18},$$

то есть $b(a^2 - b^2)/(4a) = ab/18$. Отсюда $a^2/b^2 = 9/7$, и $m + n = 16$.



Второе решение. Пусть стороны прямоугольника равны $a \geq b$, а его площадь равна $S = ab$. Обозначим площадь получившегося пятиугольника через U . Тогда

$$ab = \frac{U}{5} + 2 \cdot \frac{4U}{5} = \frac{9U}{5},$$

поэтому площадь двухслойной части равна $4U/5 = 4ab/9$.

Расположим прямоугольник так: $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (a, b)$, $D = (0, b)$, причём A складывают в C . Линия сгиба имеет уравнение

$$ax + by = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Пусть она пересекает AB в P , а CD в Q . Двухслойная часть — треугольник PCQ ; его основание $QC = (a^2 + b^2)/(2a)$, а высота равна b . Поэтому

$$\frac{b(a^2 + b^2)}{4a} = \frac{4ab}{9}.$$

Отсюда $9b^2 = 7a^2$, то есть $a^2/b^2 = 9/7$ и $m + n = 16$.

Ответ. 16.

Задача 17. Шесть посёлков расположены в два ряда по три. Дорогами соединены соседние посёлки в каждом ряду, а также три пары посёлков, стоящих друг под другом. Таким образом, всего есть семь дорог. Сколькими способами можно закрыть две из них так, чтобы по оставшимся дорогам из любого посёлка можно было добраться до любого другого?

Решение. Всего пар закрытых дорог $C_7^2 = 21$. После удаления двух дорог связность нарушается ровно в шести случаях: четырьмя способами можно отрезать один из угловых посёлков, удалив две выходящие из него дороги, и ещё двумя способами можно разрезать обе горизонтальные дороги между первым и вторым или между вторым и третьим столбцами. Поэтому подходящих способов $21 - 6 = 15$.

Ответ. 15.

Задача 18. Многочлен P степени не выше 4 удовлетворяет равенствам $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 6$, $P(4) = 24$, $P(5) = 120$. Найдите $P(6)$.

Решение. Конечными разностями последовательности значений называют разности соседних членов. Повторяя эту операцию, получают вторые, третьи и т. д. разности. Здесь

P	1	2	6	24	120
ΔP	1	4	18	96	
$\Delta^2 P$	3	14	78		
$\Delta^3 P$	11	64			
$\Delta^4 P$	53				

Если $R(x)$ — многочлен степени k , то $R(x+1) - R(x)$ имеет степень не выше $k-1$: старшие члены сокращаются. Поэтому для многочлена степени не выше 4 четвёртые конечные разности постоянны. Следующая третья разность равна $64+53 = 117$, следующая вторая — $78+117 = 195$, следующая первая — $96+195 = 291$. Значит,

$$P(6) = 120 + 291 = 411.$$

Ответ. 411.

Задача 19. На координатной плоскости даны точки $A = (2, 5)$ и $B = (12, -3)$. Точка P лежит на оси Ox , причём $AP \perp BP$. Таких точек P ровно две. Найдите сумму их абсцисс.

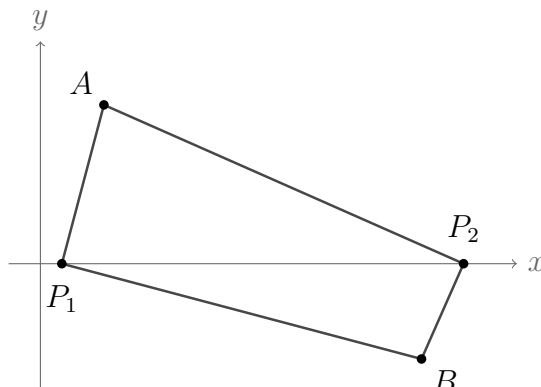
Решение. Пусть $P = (t, 0)$. Условие $AP \perp BP$ равносильно нулевому скалярному произведению векторов

$$(2 - t, 5) \cdot (12 - t, -3) = 0.$$

Отсюда

$$t^2 - 14t + 9 = 0.$$

Дискриминант положителен, поэтому точек P действительно две. По теореме Виета сумма их абсцисс равна 14.



Ответ. 14.

Задача 20. На доске написано число 1. За один ход число x на доске заменяют либо на $2x$, либо на $2x + 1$. Сделали ровно 12 ходов, причём операция $x \mapsto 2x + 1$ была применена ровно 5 раз. Найдите сумму всех различных чисел, которые могли оказаться на доске после двенадцатого хода.

Решение. После двенадцати ходов получается двоичная запись, состоящая из начальной единицы и 12 приписанных битов. Ровно пять из этих 12 битов равны 1. Поэтому имеется C_{12}^5 чисел, каждое содержит слагаемое 2^{12} . Кроме того, каждый из 12 младших разрядов равен 1 в C_{11}^4 числах. Значит, искомая сумма равна

$$C_{12}^5 2^{12} + C_{11}^4 (1 + 2 + \dots + 2^{11}) = C_{12}^5 4096 + C_{11}^4 4095 = 4595382.$$

Ответ. 4595382.

Задача 21. Последовательность начинается с $a_1 = 2$. Каждый следующий член получают, прибавляя к предыдущему его наибольший простой делитель. Найдите первый член последовательности, превосходящий 2026.

Решение. Покажем, что в последовательности встречается произведение любых двух соседних простых чисел. Число $2 \cdot 3 = 6$ встречается. Пусть появился член pq , где $p < q$ — соседние простые, а r — следующее простое после q . Пока первый множитель последовательно принимает значения $p, p + 1, \dots, r - 1$, у числа mq нет простого делителя больше q : иначе такой делитель был бы простым между q и r . Поэтому подряд идут

$$pq, (p + 1)q, \dots, rq.$$

Так по индукции возникают произведения всех соседних простых. В частности, $43 \cdot 47 = 2021$ встречается, а следующий член равен $2021 + 47 = 2068$. Это первое значение, превосходящее 2026.

Ответ. 2068.

Задача 22. Вещественные числа x и y удовлетворяют равенствам $x^3 = 3x + y$ и $y^3 = 3y + x$. Найдите все возможные значения $x^2 + y^2$. В ответе укажите их в порядке возрастания.

Решение. Вычитая равенства, получаем

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2) = 0,$$

а складывая,

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2 - 4) = 0.$$

Если $x = y$, то $x^3 = 4x$, поэтому $x^2 + y^2$ равно 0 или 8. Если $x \neq y$ и $x + y = 0$, то $x^2 = 2$, и сумма квадратов равна 4. Наконец, если $x \neq y$ и $x + y \neq 0$, то

$$x^2 + xy + y^2 = 2, \quad x^2 - xy + y^2 = 4,$$

откуда $x^2 + y^2 = 3$; такие действительные x, y существуют, поскольку тогда $xy = -1$ и $(x+y)^2 = 1$.

Ответ. 0, 3, 4, 8.

Задача 23. Рассмотрим граф с вершинами $A_1, \dots, A_6, B_1, \dots, B_6$. В нём проведены рёбра $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_5A_6, A_6A_1$, рёбра $B_1B_2, B_2B_3, \dots, B_5B_6, B_6B_1$, а также рёбра $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_6B_6$. Сколько существует способов, начиная в A_1 и двигаясь по рёбрам, пройти через каждую из остальных 11 вершин ровно один раз и вернуться в A_1 ? Обходы в противоположных направлениях считаются различными.

Решение. Посчитаем неориентированные гамильтоновы циклы. Число вертикальных рёбер A_iB_i в таком цикле должно быть чётным: при каждом вертикальном ребре мы переходим с одного шестиугольника на другой, а к исходной вершине нужно вернуться на том же шестиугольнике. Ноль вертикальных рёбер невозможен, иначе цикл не посетит вершины второго шестиугольника. Поэтому остаются случаи 2, 4 и 6 вертикальных рёбер.

Если используются ровно два вертикальных ребра, их концы на каждом шестиугольнике должны быть концами пути, проходящего через все шесть его вершин. Такой путь получается из шестиугольника удалением одного ребра, поэтому выбранные вертикальные рёбра должны быть соседними. Соседнюю пару можно выбрать 6 способами, и для каждой пары цикл определяется однозначно.

Если используются все шесть вертикальных рёбер, то на каждом из двух шестиугольников нужно выбрать совершенное паросочетание. У шестиугольника их два; чтобы получился один цикл, сверху и снизу нужно выбрать разные паросочетания. Это даёт ещё 2 цикла. При четырёх вертикальных рёбрах условия степени 2 вынуждают две отдельные компоненты, поэтому гамильтонова цикла нет.

Итак, неориентированных циклов $6 + 2 = 8$. Каждый можно пройти в двух направлениях, поэтому обходов 16.

Ответ. 16.

Задача 24. Положительные целые числа m, n, p удовлетворяют равенствам $m + n + p = 104$ и $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{4}$. Найдите наибольшее возможное значение $\max(m, n, p)$.

Решение. Умножая второе равенство на mnp , получаем

$$mnp = 4(mn + np + pm).$$

Все три числа больше 4. Положим $x = m - 4, y = n - 4, z = p - 4$. Тогда $x + y + z = 92$, а после раскрытия скобок

$$xyz = (m - 4)(n - 4)(p - 4) = 1600.$$

Пусть x — наибольшее из трёх. Тогда $x \leq 90$ и $x \mid 1600$. Наибольший делитель 1600, не превосходящий 90, равен 80. Значит, $\max(m, n, p) \leq 84$. Равенство достигается при $(x, y, z) = (80, 10, 2)$, то есть при $(m, n, p) = (84, 14, 6)$.

Ответ. 84.