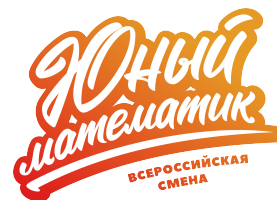


Математическая игра «Тетрис». 7–8 классы.

Решения и ответы



Задача 1. Если первую цифру двузначного числа N умножить на 4, вторую — на 2 и сложить результаты, получится половина числа N . Найдите все такие числа.

Решение. Пусть первая цифра равна a , вторая — b . Тогда $N = 10a + b$, а по условию

$$4a + 2b = \frac{10a + b}{2}.$$

Умножая на 2, получаем $8a + 4b = 10a + b$, то есть $3b = 2a$. Поскольку a — цифра от 1 до 9, число a должно делиться на 3. Получаем $a = 3, 6$ или 9 ; тогда $b = 2, 4$ или 6 соответственно. Значит, подходят ровно 32, 64 и 96.

Ответ. 32, 64, 96.

Задача 2. Шесть футбольных команд сыграли однокруговой турнир и набрали соответственно 13, 10, 7, 5, 3 и 2 очка. За победу команда получает 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Сколько ничьих было в турнире?

Решение. Всего сыграно $C_6^2 = 15$ матчей. Если бы каждый матч закончился победой одной из команд, суммарно было бы начислено $15 \cdot 3 = 45$ очков. На самом деле команды набрали $13 + 10 + 7 + 5 + 3 + 2 = 40$ очков. Каждая ничья уменьшает общую сумму ровно на 1: вместо трёх очков разыгрываются два. Значит, ничьих $45 - 40 = 5$.

Ответ. 5.

Задача 3. 19 синих меток делят шест на 20 равных частей, а 16 красных меток — на 17 равных частей. На сколько процентов расстояние между соседними синими метками меньше расстояния между соседними красными?

Решение. Пусть длина шеста равна L . Тогда расстояние между соседними синими метками равно $L/20$, а между красными — $L/17$. Относительно красного промежутка уменьшение составляет

$$1 - \frac{L/20}{L/17} = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20} = 15\%.$$

Ответ. 15.

Задача 4. На школьной ярмарке Маша купила несколько одинаковых наборов наклеек за 1155 монет. Позже она вернула 3 набора. На вырученные деньги она купила альбом за 150 монет, и у неё ещё осталась сдача. Сколько наборов купила Маша изначально, если известно, что их количество — двузначное число, которое не делится на 3?

Решение. Пусть Маша купила n наборов по p монет. Тогда $np = 1155$, значит, n — делитель 1155. После возврата трёх наборов она получила $3p > 150$, поэтому $p > 50$ и $n = 1155/p < 24$.

Двузначные делители числа $1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, меньшие 24, — это 11, 15 и 21. По условию n не делится на 3, поэтому остаётся только $n = 11$. Проверка: тогда один набор стоит 105 монет, а за три возвращённых набора Маша получает 315 монет, чего хватает на альбом и сдачу.

Ответ. 11.

Задача 5. Найдите наименьшее целое число $n > 72$, у которого множество простых делителей совпадает с множеством простых делителей числа 72.

Решение. Так как $72 = 2^3 \cdot 3^2$, искомое число имеет вид $2^a 3^b$, где $a, b \geq 1$. При $b = 1$ числа имеют вид $3 \cdot 2^a$: после 48 следующим идёт 96. При $b = 2$ после 72 следующим идёт 144. При $b = 3$ подходящие числа идут 54, 108, ..., а при $b \geq 4$ они не меньше 162. Значит, между 72 и 96 подходящих чисел нет, а $96 = 2^5 \cdot 3$ подходит.

Ответ. 96.

Задача 6. Серёжа записал на первой доске 8 различных двузначных чисел. Костя в каждом числе поменял местами цифры и записал полученные двузначные числа на вторую доску. Оказалось, что сумма чисел на первой доске, а также каждое число на второй доске делятся на 5. Какие числа записал Серёжа? В ответе укажите самое маленькое число.

Решение. Каждое число на второй доске двузначное и кратно 5, поэтому его последняя цифра равна 5: нулём она быть не может, иначе исходное число начиналось бы с 0. Значит, все исходные числа имеют вид $51, 52, \dots, 59$. Нужно выбрать восемь из этих девяти чисел. Сумма всех девяти равна 495 и делится на 5. Поэтому исключённое число тоже должно делиться на 5. Среди чисел $51\text{--}59$ это только 55. Значит, Серёжа записал $51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59$, и наименьшее из них — 51.

Ответ. 51.

Задача 7. Натуральные числа x и y не превосходят 20. Известно, что $x > 2y$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{x+3}{y+1}.$$

Решение. Так как x и y целые и $x > 2y$, имеем $x \geq 2y + 1$. Поэтому

$$\frac{x+3}{y+1} \geq \frac{2y+4}{y+1} = 2 + \frac{2}{y+1}.$$

Чтобы это значение было как можно меньше, нужно взять максимально возможное y . Из $2y + 1 \leq 20$ получаем $y \leq 9$. При $y = 9$ можно взять $x = 19$, и тогда значение выражения равно $22/10 = 2,2$. Значит, минимум равен 2,2.

Ответ. 2,2.

Задача 8. 23 одинаковых блинчика поровну разделили между семью людьми. Кусочком назовём часть блинчика, меньшую целого блинчика. Какое наименьшее число кусочков могло получиться?

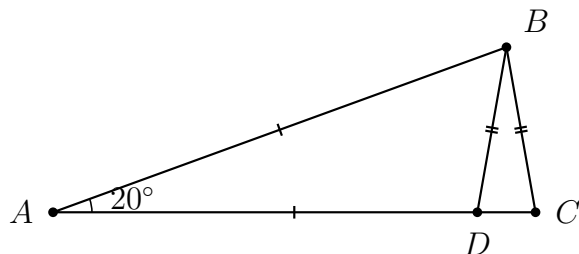
Решение. Каждый должен получить $23/7 = 3 + 2/7$ блинчика, поэтому каждому нужен хотя бы один кусочек: всего не меньше 7. Если кусочков ровно 7, каждый получает один кусочек размером $2/7$. Но тогда два оставшихся целых блинчика должны быть полностью разрезаны на куски по $2/7$, а число таких кусков в одном целом блинчике должно удовлетворять $2k/7 = 1$, что невозможно. Восемь кусочков получить можно: каждый из двух оставшихся блинчиков разрезать на три куска по $2/7$ и один кусок $1/7$. Шесть человек получают по $2/7$, седьмой — два куса по $1/7$.

Ответ. 8.

Задача 9. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = AC$ и $\angle BAC = 20^\circ$. Внутри стороны AC выбрана точка D так, что $BD = BC$. Найдите $\angle ABD$.

Решение. Углы при основании ABC равны по 80° . Так как D лежит внутри AC , $\angle BCD = 80^\circ$. В треугольнике BCD стороны BD и BC равны, поэтому $\angle BDC = 80^\circ$, откуда $\angle DBC = 20^\circ$. Следовательно,

$$\angle ABD = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ.$$



Ответ. 60° .

Задача 10. По окружности по порядку написаны числа $1, 2, \dots, 10$. Сколькими способами можно выбрать четыре числа так, чтобы никакие два выбранных числа не стояли рядом?

Решение. Если 1 не выбрано, выбираем четыре несоседних числа из цепочки $2, 3, \dots, 10$: $C_6^4 = 15$ способов. Если 1 выбрано, числа 2 и 10 выбирать нельзя; остаётся выбрать три несоседних числа из $3, 4, \dots, 9$: $C_5^3 = 10$ способов. Итого $15 + 10 = 25$.

Ответ. 25.

Задача 11. Натуральное число заканчивается цифрой 8. Если последнюю цифру 8 зачеркнуть, а в начале оставшегося числа приписать 10, получится число, втрое больше исходного. Найдите наименьшее исходное число.

Решение. Пусть после зачёркивания последней восьмёрки остаётся k -значное число x . Тогда исходное число равно $10x + 8$, а новое — $10 \cdot 10^k + x$. Поэтому $10 \cdot 10^k + x = 3(10x + 8)$, откуда $29x = 10^{k+1} - 24$. При $k = 1$ и $k = 2$ целого x не получается. При $k = 3$ имеем $x = (10000 - 24)/29 = 344$, поэтому $N = 3448$. Это и есть наименьший вариант.

Ответ. 3448.

Задача 12. Логический элемент Z получает три числа, каждое из которых равно 0 или 1. Он выдаёт 1, если ровно два из трёх входных чисел равны 1, и выдаёт 0 во всех остальных случаях. Числа a, b, c подаются на первый Z , числа e, f, g — на второй. Затем результаты этих двух элементов вместе с числом d подаются на третий Z . Для скольких наборов a, b, c, d, e, f, g итоговый результат равен 1?

Решение. Если $d = 0$, оба первых элемента должны выдать 1. Каждый выдаёт 1 для трёх из восьми троек, поэтому получаем $3 \cdot 3 = 9$ вариантов. Если $d = 1$, ровно один из двух первых элементов должен выдать 1. Выбираем его двумя способами; для него есть 3 подходящие тройки, а для второго — 5. Получаем $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Всего $9 + 30 = 39$.

Ответ. 39.

Задача 13. Записали подряд трёхзначные блоки 999, 998, 997, ..., 003, 002, 001 и получили одно 2997-значное число. Найдите остаток от его деления на 1001.

Решение. Полученное число равно $1 + 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 1000^2 + \dots + 999 \cdot 1000^{998}$. Так как $1000 \equiv -1 \pmod{1001}$, остаток равен остатку числа $1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 998 + 999$. Первые 998 слагаемых разбиваются на 499 пар с суммой -1 , поэтому получаем $999 - 499 = 500$.

Ответ. 500.

Задача 14. Разным буквам соответствуют разные цифры, причём $GEO - MET + RY = 0$. Числа GEO и MET трёхзначные, RY двузначное. Найдите наибольшее возможное восьмизначное число $GEOMETRY$.

Решение. Перепишем равенство как $GEO + RY = MET$. При сложении единиц возникает перенос, а в разряде десятков $E + R + 1 = E + 10$, поэтому $R = 9$. Далее $M = G + 1$, а $O + Y \geq 10$. Максимизируем $GEOMETRY$ слева направо. G не может быть 8, иначе $M = 9 = R$, поэтому $G = 7$ и $M = 8$. Если $E = 6$, то для O и Y остаются цифры не больше 5 и 4, и их сумма меньше 10; значит, максимум $E = 5$. Тогда O максимально равно 6. Чтобы $O + Y \geq 10$, берём $Y = 4$; получаем $O + Y = 10$, поэтому $T = 0$. Итак, $GEOMETRY = 75685094$.

Ответ. 75685094.

Задача 15. Простые числа p, q, r удовлетворяют $pqr + 2025 = 3(pq + qr + rp)$. Найдите $p + q + r$.

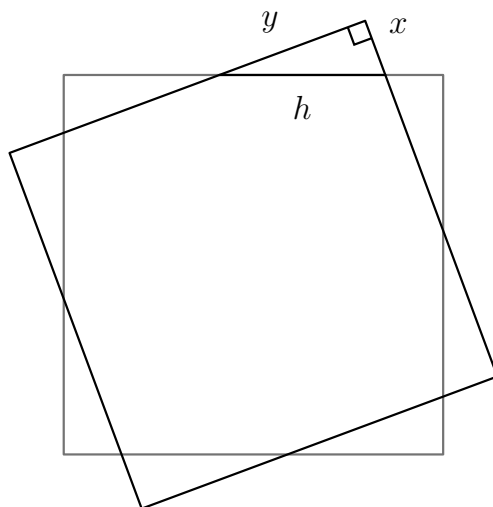
Решение. Если все три простые нечётны, левая часть чётна, а правая нечётна, что невозможно. Значит, одно из чисел равно 2. Из равенства $pqr = 3(pq + qr + rp) - 2025$ следует, что pqr делится на 3, поэтому другое простое равно 3. Пусть третье равно x . Тогда $6x + 2025 = 3(6 + 5x) = 18 + 15x$, откуда $9x = 2007$ и $x = 223$. Число 223 простое, поэтому $p + q + r = 228$.

Ответ. 228.

Задача 16. Квадрат со стороной 16 повернули вокруг его центра на некоторый угол. Площадь объединения исходного и повернутого квадратов оказалась равна 288, а их пересечение представляет собой восьмиугольник. Найдите периметр этого восьмиугольника.

Решение. За пределами первого квадрата находятся четыре одинаковых прямоугольных треугольника. Пусть их катеты x и y . Тогда $288 = 16^2 + 4 \cdot xy/2$, откуда $xy = 16$. Пусть h — гипотенуза такого треугольника; она является стороной общего восьмиугольника. Одна сторона повернутого квадрата состоит из отрезков x, h, y , поэтому $x + y + h = 16$. Кроме того, $h^2 = x^2 + y^2$. Подставляя $h = 16 - x - y$ и используя $xy = 16$, получаем $x + y = 9$, значит, $h = 7$.

Четыре стороны восьмиугольника, лежащие на сторонах повёрнутого квадрата, имеют длину 7; по симметрии при перестановке двух квадратов остальные четыре стороны также имеют длину 7. Поэтому периметр равен $8 \cdot 7 = 56$.



Ответ. 56.

Задача 17. Найдите сумму всех четырёхзначных чисел, у которых цифры строго возрастают слева направо и которые делятся на 36.

Решение. Число должно делиться на 4 и на 9. Последние две цифры должны образовывать кратное 4 число с возрастающими цифрами: 12, 16, 24, 28, 36, 48, 56, 68. Для окончания 56 сумма первых двух цифр должна быть 7; подходит только $3 + 4$, получаем 3456. Для окончания 68 сумма первых двух цифр должна быть 4; подходит только $1 + 3$, получаем 1368. Остальные окончания подходящих чисел не дают. Поэтому $3456 + 1368 = 4824$.

Ответ. 4824.

Задача 18. Аня задумала двузначное число, равное произведению двух последовательных натуральных чисел. Боря знает это. Аня сказала: «Если я назову сумму цифр моего числа, ты сможешь однозначно определить число». Затем она добавила: «На самом деле тебе достаточно узнать только, является ли эта сумма простым числом». Какое число задумала Аня?

Решение. Двузначные произведения двух последовательных натуральных чисел: 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90. Суммы их цифр: 3, 2, 3, 6, 11, 9, 9. Из первой фразы остаются только 20, 42 и 56, потому что суммы 2, 6 и 11 встречаются по одному разу. Если сумма простая, остаются два варианта — 20 и 56. Значит, ответ на вопрос о простоте суммы должен быть «нет», и тогда единственный вариант — 42.

Ответ. 42.

Задача 19. Сколько существует целых пар (x, y) , удовлетворяющих уравнению $2x^2 + y^2 = 2xy + 4x$?

Решение. Перенесём всё в одну сторону и дополним до квадратов: $(y - x)^2 + (x - 2)^2 = 4$. Два целых квадрата могут иметь сумму 4 только как $4 + 0$ или $0 + 4$. Получаем четыре пары: $(2, 4)$, $(2, 0)$, $(4, 4)$, $(0, 0)$. Других нет.

Ответ. 4.

Задача 20. Натуральное число A заканчивается на 0. Его наибольший натуральный делитель, не равный самому A , обозначили через B . Известно, что B является кубом натурального числа и $A + B < 2026$. Найдите A .

Решение. Число A чётно, поэтому его наименьший простой делитель равен 2, а наибольший собственный делитель B равен $A/2$. Пусть $B = t^3$. Тогда $A = 2t^3$. Поскольку A заканчивается на 0, число t делится на 5; положим $t = 5k$. Получаем $A = 250k^3$, $B = 125k^3$, поэтому

$A + B = 375k^3 < 2026$. При $k = 1$ получаем $A = 250$, а уже при $k = 2$ имеем $A + B = 3000$. Значит, единственный вариант — $A = 250$.

Ответ. 250.

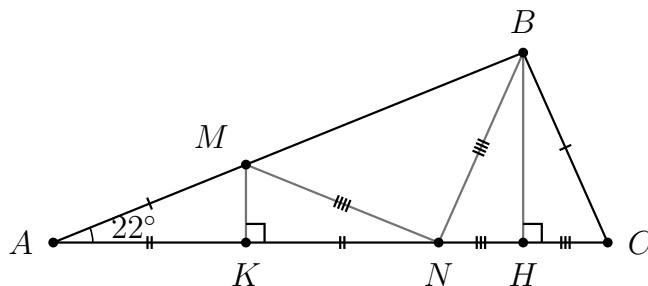
Задача 21. Команда начинает игру с 1 очком. Затем проходят 12 раундов: в семи из них команда получает ещё одно очко, а в пяти теряет одно очко. Сколькими способами могут идти результаты этих 12 раундов, если количество очков ни разу не становится отрицательным?

Решение. Без ограничения семь побед и пять поражений можно расположить $C_{12}^5 = 792$ способами. Назовём последовательность плохой, если счёт хотя бы раз становится равным -1 . До первого такого момента поражений ровно на 2 больше, чем побед. Поменяем в этой начальной части победы и поражения местами. Получаем взаимно однозначное соответствие с последовательностями из девяти побед и трёх поражений, которых $C_{12}^3 = 220$. Значит, хороших последовательностей $792 - 220 = 572$.

Ответ. 572.

Задача 22. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка M так, что $AM = BC$. Из M и B опущены перпендикуляры MK и BH на сторону AC . Известно, что $AC = 2KH$ и $\angle A = 22^\circ$. Найдите $\angle C$.

Решение. Так как M лежит на стороне AB , точки K и H расположены на AC в порядке A, K, H, C . Из $AC = AK + KH + HC = 2KH$ следует $KH = AK + HC$. На KH выберем точку N так, что $AK = KN$ и $NH = HC$. Точка M лежит на серединном перпендикуляре к AN , поэтому $MA = MN$. Аналогично B лежит на серединном перпендикуляре к NC , поэтому $BN = BC$. Но $AM = BC$, следовательно, $MN = BN$. Треугольник AMN равнобедренный, его углы при A и N равны 22° , поэтому внешний угол NMB равен 44° . Из $MN = BN$ получаем $\angle NBM = 44^\circ$. Внешний угол BNC треугольника ABN равен $22^\circ + 44^\circ = 66^\circ$. Так как $BN = BC$, то $\angle C = \angle BNC = 66^\circ$.



Ответ. 66° .

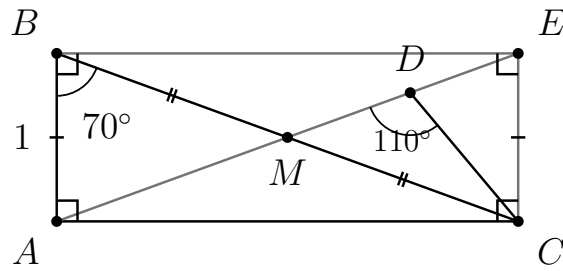
Задача 23. Найдите наименьшее десятизначное натуральное число, произведение цифр которого равно $10!$.

Решение. Имеем $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Поэтому среди цифр обязательно две пятёрки и одна семёрка. Оставшийся множитель $2^8 \cdot 3^4 = 20736$ нужно получить цифрами, составленными из двоек и троек. Четырёх таких цифр недостаточно, потому что $9^4 < 20736$, значит, нужно не меньше пяти. Итак, неединичных цифр как минимум восемь; для минимального десятизначного числа первые две цифры должны быть единицами. Для пяти оставшихся цифр произведения 20736 наименьшая возможная первая цифра равна 4: при первой цифре не больше 3 произведение остальных четырёх потребовало бы значения больше 9^4 . После 4 остаётся 5184. Следующая цифра не меньше 8, потому что $7 \cdot 9^3 < 5184$; при 8 остаётся 648, и следующая минимально равна 8, после чего остаётся $81 = 9 \cdot 9$. Получаем цифры 4, 8, 8, 9, 9. Вместе с 5, 5, 7 и двумя единицами минимальное число равно 1145578899.

Ответ. 1145578899.

Задача 24. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 90° , угол B равен 70° , $AB = 1$. Точка M — середина гипотенузы BC . На луче AM за точкой M выбрана точка D , для которой $\angle CDA = 110^\circ$. Найдите CD .

Решение. Достроим ABC до прямоугольника $ABEC$. Диагонали AE и BC делятся пополам, поэтому A, M, E лежат на одной прямой, а E лежит на луче AM . Кроме того, $CE = AB = 1$ и $\angle CEA = \angle ABC = 70^\circ$. Точка D лежит между M и E , поэтому лучи DA и DE противоположны и $\angle CDE = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. В треугольнике CDE углы при D и E равны, значит, $CD = CE = 1$.



Ответ. 1.