

Математическая игра «Тетрис». 9 класс.

Решения и ответы

Задача 1. Сколькими способами можно разбить числа $1, 2, \dots, 8$ на четыре неупорядоченные пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была простым числом?

Решение. Число 1 может стоять в паре только с 2, 4 или 6. Перебирая эти три случая, получаем ровно шесть разбиений:

$$\begin{aligned}(1, 2), (3, 4), (5, 8), (6, 7); \\ (1, 2), (3, 8), (4, 7), (5, 6); \\ (1, 4), (2, 3), (5, 8), (6, 7); \\ (1, 4), (2, 5), (3, 8), (6, 7); \\ (1, 6), (2, 3), (4, 7), (5, 8); \\ (1, 6), (2, 5), (3, 8), (4, 7).\end{aligned}$$

Других вариантов нет: все возможные партнёры числа 1 рассмотрены, а в каждом случае перебраны все допустимые пары оставшихся чисел.

Ответ. 6.

Задача 2. У Пети 10 монет, каждая достоинством 2 или 5 рублей. Общая стоимость двухрублёвых монет больше общей стоимости пятирублёвых. Какое наименьшее число двухрублёвых монет может быть у Пети?

Решение. Пусть двухрублёвых монет k . Тогда пятирублёвых $10 - k$. По условию

$$2k > 5(10 - k),$$

откуда $7k > 50$, то есть $k \geq 8$. При $k = 8$ двухрублёвые монеты дают 16 рублей, а две пятирублёвые — 10 рублей, так что это значение подходит.

Ответ. 8.

Задача 3. Даны два различных натуральных числа, не превосходящих 2026. Каждую минуту одно из них заменяют средним арифметическим двух имеющихся чисел. Какое наибольшее число минут все возникающие числа могут оставаться целыми?

Решение. Пусть разность двух текущих чисел равна d . Среднее арифметическое целое тогда и только тогда, когда d чётно. После замены одного числа средним новая разность равна $d/2$. Поэтому для k шагов начальная разность должна делиться на 2^k . Она не превосходит 2025, значит, $2^k \leq 2025$ и $k \leq 10$, так как $2^{10} = 1024$, а $2^{11} = 2048$. Оценка достигается для чисел 1 и 1025: их разность равна 2^{10} .

Ответ. 10.

Задача 4. На координатной плоскости проведены прямые $y = x + 2$, $y = 3x + 4$, $y = 5x + 6$, $y = 7x + 8$, $y = 9x + 10$ и $y = 11x + 12$. На сколько областей они разбивают плоскость?

Решение. При $x = -1$ на каждой прямой получается $y = 1$, поэтому все шесть прямых проходят через точку $(-1, 1)$. Их угловые коэффициенты различны. Каждая новая прямая через общую точку добавляет две области, поэтому шесть прямых делят плоскость на $2 \cdot 6 = 12$ областей.

Ответ. 12.

Задача 5. Семь простых чисел $q_1, \dots, q_7$, не обязательно различных, таковы, что $q_1^2 + \dots + q_7^2$ является квадратом нечётного целого числа. Найдите $q_1 + \dots + q_7$.

Решение. Квадрат любого нечётного простого числа даёт остаток 1 по модулю 8, а 2^2 — остаток 4. Пусть среди семи простых m двоек. Тогда сумма квадратов сравнима с

$$4m + (7 - m) = 7 + 3m \pmod{8}.$$



Квадрат нечётного числа сравним с 1, поэтому $7 + 3m \equiv 1 \pmod{8}$. При $0 \leq m \leq 7$ отсюда $m = 6$. Пусть седьмое простое равно p . Тогда

$$p^2 + 24 = r^2, \quad (r - p)(r + p) = 24.$$

Оба множителя положительны и чётны. Пары 2, 12 и 4, 6 дают соответственно $p = 5$ и $p = 1$. Значит, $p = 5$, и сумма равна $6 \cdot 2 + 5 = 17$.

Ответ. 17.

Задача 6. Две высоты треугольника равны 10 и 24, а радиус вписанной окружности равен 4. Найдите площадь треугольника.

Решение. Пусть площадь равна S , а стороны, к которым проведены данные высоты, — a и b . Тогда

$$a = \frac{S}{5}, \quad b = \frac{S}{12}.$$

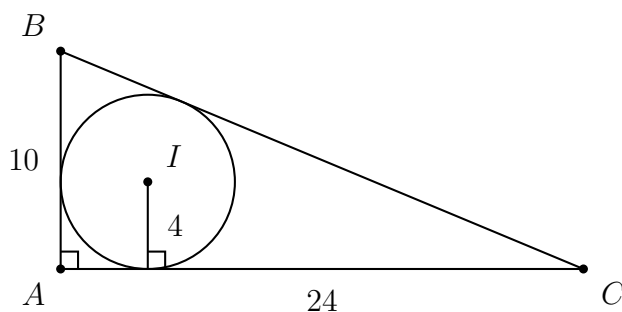
Полупериметр равен $S/r = S/4$, поэтому третья сторона

$$c = \frac{S}{2} - \frac{S}{5} - \frac{S}{12} = \frac{13S}{60}.$$

Значит, $a : b : c = 12 : 5 : 13$, поэтому треугольник прямоугольный с катетами a и b . Тогда

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{5} \cdot \frac{S}{12} = \frac{S^2}{120}.$$

Так как $S > 0$, получаем $S = 120$.



Ответ. 120.

Задача 7. Все трёхбуквенные слова, составленные из 33 букв русского алфавита, расположены в лексикографическом (словарном) порядке. В слове КОТ случайно и равновероятно выбирают одну из трёх позиций и заменяют стоящую там букву случайно и равновероятно одной из остальных 32 букв. Какова вероятность того, что новое слово будет стоять позже слова КОТ? Ответ представьте в виде несократимой дроби и запишите подряд (без пробела) её числитель и знаменатель.

Решение. При замене одной буквы новое слово будет позже слова КОТ тогда и только тогда, когда новая буква стоит в алфавите позже заменённой. Буквы К, О, Т имеют номера 12, 16 и 20, поэтому более поздних букв для них соответственно 21, 17 и 13. Всего имеется $3 \cdot 32 = 96$ равновероятных замен, из них благоприятных $21 + 17 + 13 = 51$. Поэтому вероятность равна

$$\frac{51}{96} = \frac{17}{32}.$$

Ответ. $\frac{17}{32}$; в систему — 1732.

Задача 8. В трапеции $ABCD$ основания AB и CD параллельны, $AB = 20$, $CD = 24$, площадь трапеции равна 880. Найдите площадь треугольника, вершины которого — середины отрезков AB , AC и BD .

Решение. Высота трапеции равна

$$\frac{2 \cdot 880}{20 + 24} = 40.$$

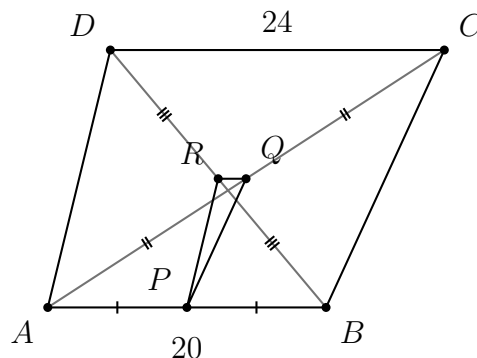
Пусть P, Q, R — середины AB, AC, BD соответственно. Зададим координаты

$$A = (0, 0), \quad B = (20, 0), \quad D = (t, 40), \quad C = (t + 24, 40).$$

Тогда

$$Q = \left(\frac{t + 24}{2}, 20 \right), \quad R = \left(\frac{t + 20}{2}, 20 \right),$$

поэтому $QR = 2$. Расстояние от P до QR равно 20, значит, площадь треугольника PQR равна $2 \cdot 20/2 = 20$.



Ответ. 20.

Задача 9. Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с 00000. Среди всех пятёрок подряд встречаются все 32 возможные двоичные пятёрки. Найдите пять последних цифр.

Решение. В последовательности длины 36 имеется ровно 32 пятёрки подряд, поэтому каждая возможная двоичная пятёрка встречается ровно один раз. Будем считать пятёрку переходом от её первых четырёх цифр к последним четырём. Для каждого четырёхзначного набора использованы ровно два входящих и два исходящих перехода.

В цепочке переходов у начальной вершины число выходов на 1 больше числа входов, а у конечной — на 1 меньше, если эти вершины различны. Но здесь у каждой вершины входов и выходов поровну. Значит, начальные четыре цифры совпадают с конечными, то есть последние четыре цифры равны 0000. Последняя пятёрка не равна 00000, поскольку она уже встретилась в начале. Поэтому последние пять цифр — 10000.

Ответ. 10000.

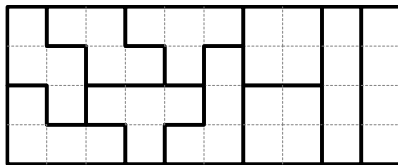
Задача 10. Клетчатый квадрат разрезан на тетрамино. Все пять видов использованы одинаковое число раз; разрешены повороты и отражения. Какова минимальная площадь квадрата?

Решение. Обозначим пять видов тетрамино через $I, O, T, L, S/Z$. Пусть каждого вида использовано по k раз, а сторона квадрата равна n . Тогда

$$n^2 = 5 \cdot 4k = 20k,$$

поэтому n делится на 10. Первый возможный размер — 10×10 , и тогда каждого вида по 5 штук. При шахматной раскраске тетрамино $I, O, L, S/Z$ покрывают по две клетки каждого цвета, а каждое T создаёт разность ± 2 между числами чёрных и белых клеток. Пять таких разностей не могут дать 0, поэтому квадрат 10×10 замостить нельзя. Значит, $n \geq 20$.

Квадрат 20×20 можно разбить на десять прямоугольников 4×10 . Каждый из них замощается двумя тетрамино каждого вида, как показано на схеме.



Значит, квадрат 20×20 замостить можно.

Ответ. 400.

Задача 11. Найдите наименьшее простое число, представимое в виде суммы квадратов четырёх различных простых чисел.

Решение. Если среди четырёх простых нет числа 2, сумма четырёх квадратов чётна и больше 2, поэтому простым числом быть не может. Значит, один из простых равен 2. Если среди остальных есть число не меньше 13, то сумма не меньше

$$2^2 + 3^2 + 5^2 + 13^2 = 207.$$

Поэтому для поиска ответа меньше 207 достаточно проверить тройки из 3, 5, 7, 11:

$$87, \quad 159, \quad 183, \quad 199.$$

Первые три числа делятся на 3, а

$$199 = 2^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2.$$

Число 199 простое: оно не делится ни на одно из простых чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, а $\sqrt{199} < 15$.

Ответ. 199.

Задача 12. Положительную дробь назовём удачной, если она равна некоторой положительной дроби, числитель которой на 2 меньше знаменателя. Сколько удачных дробей можно записать со знаменателем 1260?

Решение. Пусть $a/1260$ — удачная дробь. Тогда для некоторого натурального $n > 2$

$$\frac{a}{1260} = \frac{n-2}{n}.$$

Отсюда $n(1260 - a) = 2520$, поэтому n — делитель 2520, больший 2. И наоборот, каждый такой делитель даёт единственное положительное целое

$$a = 1260 - \frac{2520}{n},$$

причём разные значения n дают разные значения a . Так как $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, число его положительных делителей равно

$$(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 48.$$

Не подходят только $n = 1$ и $n = 2$, поэтому удачных дробей $48 - 2 = 46$.

Ответ. 46.

Задача 13. 44 одинаковых блинчика поровну разделили между 12 людьми. Блинчики разрешалось разрезать. Кусочком назовём каждую получившуюся часть одного блинчика, меньшую целого блинчика. Какое наименьшее число кусочков могло получиться?

Решение. Каждый должен получить $44/12 = 3 + 2/3$ блинчика. Значит, целыми можно оставить не более $12 \cdot 3 = 36$ блинчиков, поэтому разрезать нужно хотя бы 8.

Пусть разрезано k блинчиков. Построим двудольный граф: его вершины — эти k блинчиков и 12 человек, а каждый кусочек соединяет свой блинчик с получившим его человеком. Число рёбер равно числу кусочков. В компоненте с a блинчиками и b людьми все блинчики этой

компоненты целиком распределены между входящими в неё людьми. Каждый человек всего получил $3 + 2/3$ блинчика, а число полученных им целых блинчиков целое. Поэтому количество блинчиков, полученное каждым человеком кусочками, имеет дробную часть $2/3$. Сумма по компоненте может быть целой только при $3 \mid b$. Следовательно, в каждой компоненте не меньше трёх человек и компонент не больше четырёх. В графе $k + 12$ вершин, значит, число рёбер не меньше

$$(k + 12) - 4 \geq 8 + 8 = 16.$$

Шестнадцать кусочков получить можно. Дадим каждому по три целых блинчика. Оставшиеся 8 блинчиков распределим между четырьмя тройками людей: для каждой тройки два блинчика разрежем на $2/3 + 1/3$ и $1/3 + 2/3$. Двое получают по одному куску $2/3$, третий — два куска по $1/3$.

Ответ. 16.

Задача 14. По окружности по порядку написаны числа $1, 2, \dots, 20$. Сколькими способами можно выбрать пять чисел так, чтобы между любыми двумя соседними выбранными числами по окружности стояло хотя бы два невыбранных числа?

Решение. Отметим одно из пяти выбранных чисел. Пусть между последовательными выбранными числами стоят $x_1, \dots, x_5$ невыбранных чисел. Тогда

$$x_1 + \dots + x_5 = 15, \quad x_i \geq 2.$$

Положив $y_i = x_i - 2$, получаем $y_1 + \dots + y_5 = 5$. Число упорядоченных пятёрок неотрицательных решений равно $C_9^4 = 126$. Отмеченное число можно выбрать 20 способами, а каждый набор посчитан пять раз. Поэтому

$$\frac{20 \cdot 126}{5} = 504.$$

Ответ. 504.

Задача 15. Сколько существует целых пар (x, y) , удовлетворяющих уравнению

$$2x^2 + y^2 = 2xy + 8x + 49?$$

Решение. Перенесём слагаемые и выделим квадраты:

$$(y - x)^2 + (x - 4)^2 = 65.$$

Число 65 представляется в виде суммы двух квадратов двумя способами без учёта порядка и знаков:

$$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2.$$

В каждом случае числа ненулевые и различные, поэтому их можно переставить двумя способами и независимо выбрать знаки четырьмя способами. Получаем $8 + 8 = 16$ пар. Переход обратно однозначен: если $u = y - x$, $v = x - 4$, то $x = v + 4$, $y = x + u$.

Ответ. 16.

Задача 16. Натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОД}(a, b) = 18$, а $\text{НОК}(a, b) = 27720$. Найдите наименьшее возможное значение $a + b$.

Решение. Запишем $a = 18x$, $b = 18y$. Тогда $\text{НОД}(x, y) = 1$ и

$$xy = \frac{27720}{18} = 1540 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Поэтому каждый из взаимно простых блоков 4, 5, 7, 11 целиком входит либо в x , либо в y . При фиксированном произведении сумма двух положительных множителей тем меньше, чем они ближе друг к другу. Среди допустимых множителей, не превосходящих $\sqrt{1540}$, получаем

$$1, 4, 5, 7, 11, 20, 28, 35.$$

Наибольший из них равен 35, а парный ему множитель равен 44. Значит,

$$a + b = 18(35 + 44) = 1422.$$

Ответ. 1422.

Задача 17. На доске написано число 1. За один ход его заменяют либо на $2x$, либо на $2x + 1$, где x — текущее число. Сколько различных чисел, делящихся на 7, можно получить ровно за 8 ходов?

Решение. В двоичной записи операции $x \mapsto 2x$ и $x \mapsto 2x + 1$ означают приписывание справа соответственно цифры 0 или 1. Поэтому после восьми ходов получаются в точности все целые числа от $2^8 = 256$ до $2^9 - 1 = 511$. Число кратных 7 на этом отрезке равно

$$\left\lfloor \frac{511}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{255}{7} \right\rfloor = 73 - 36 = 37.$$

Ответ. 37.

Задача 18. Миша участвует в часовом велоэезде. Велокомпьютер в любой момент прогнозирует, сколько километров он проедет за оставшееся до конца часа время, считая, что дальше его средняя скорость будет такой же, как с начала заезда. Проехав 1 км за t минут, Миша увидел прогноз d км. За следующие 36 минут он проехал ещё 15 км, после чего компьютер снова показал тот же прогноз d км. Найдите d .

Решение. После первых t минут средняя скорость равна $1/t$ км/мин, поэтому

$$d = \frac{60 - t}{t}.$$

Через 36 минут пройдено уже 16 км за $t + 36$ минут, а до конца часа осталось $24 - t$ минут. Значит,

$$d = \frac{16(24 - t)}{t + 36}.$$

Приравнивая выражения, получаем

$$\frac{60 - t}{t} = \frac{16(24 - t)}{t + 36},$$

откуда $(t - 12)^2 = 0$. Поэтому $t = 12$ и $d = (60 - 12)/12 = 4$.

Ответ. 4.

Задача 19. Поезд состоит из 20 вагонов, пронумерованных от 1 до 20 от начала поезда. Некоторые вагоны почтовые. Известно, что почтовых вагонов чётное число; номер ближайшего к началу почтового вагона равен общему количеству почтовых вагонов; номер последнего почтового вагона в четыре раза больше количества почтовых вагонов; каждый почтовый вагон сцеплен хотя бы с одним другим почтовым вагоном. Найдите номера всех почтовых вагонов. В ответе запишите их по возрастанию.

Решение. Пусть почтовых вагонов k . Номер последнего равен $4k \leq 20$, поэтому $k \leq 5$. Так как k положительно и чётно, $k = 2$ или $k = 4$. При $k = 2$ первый почтовый вагон — №2, а последний — №8; они не соседние, что противоречит условию. Значит, $k = 4$. Тогда первый почтовый вагон — №4, поэтому вагон №5 тоже обязан быть почтовым. Последний почтовый вагон — №16, поэтому вагон №15 также обязан быть почтовым.

Ответ. 4, 5, 15, 16.

Задача 20. В произведении $481726 \cdot 735941$ в каждом из двух чисел ставят ровно одну запятую между соседними цифрами. Сколько различных значений произведения можно получить?

Решение. Постановка запятой в первом числе означает деление 481726 на 10^k , где $1 \leq k \leq 5$, а во втором — деление 735941 на 10^ℓ , где $1 \leq \ell \leq 5$. Поэтому новое произведение равно

$$\frac{481726 \cdot 735941}{10^{k+\ell}}.$$

Сумма $k + \ell$ принимает все целые значения от 2 до 10, то есть 9 значений, и они дают 9 различных произведений.

Ответ. 9.

Задача 21. На фиксированной доске 6×6 выбирают 6 клеток так, чтобы в каждой строке и каждом столбце была выбрана ровно одна клетка, а на обеих главных диагоналях выбранных клеток не было. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Разобьём строки на пары $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$ и столбцы на такие же три пары. Из каждой пары строк нельзя выбирать клетки в соответствующей паре столбцов.

Возможны два случая. Если хотя бы одна пара строк целиком попадает в одну пару столбцов, то эта пара столбцов уже заполнена. Тогда одна из двух оставшихся пар строк вынуждена целиком попасть в следующую пару столбцов, а последняя — в оставшуюся. Значит, все три пары строк переходят целиком и образуют с тремя парами столбцов один из двух ориентированных 3-циклов. Внутри каждой пары есть 2 способа расставить выбранные клетки. Получаем

$$2 \cdot 2^3 = 16.$$

Во втором случае из каждой пары строк одна выбранная клетка попадает в одну допустимую пару столбцов, а другая — в другую. Для каждой пары строк есть 2 способа распределить её две строки, всего 2^3 способов. Затем для каждой пары столбцов есть 2 способа распределить две пришедшие клетки по столбцам, ещё 2^3 способов. Получаем

$$2^3 \cdot 2^3 = 64.$$

Итого $16 + 64 = 80$.

Ответ. 80.

Задача 22. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны CD , а точка X лежит на стороне BC . Известно, что $\angle MAX = 30^\circ$, $\angle BAX = \angle MAD$ и $AX = XM$. Во сколько раз XC больше BX ?

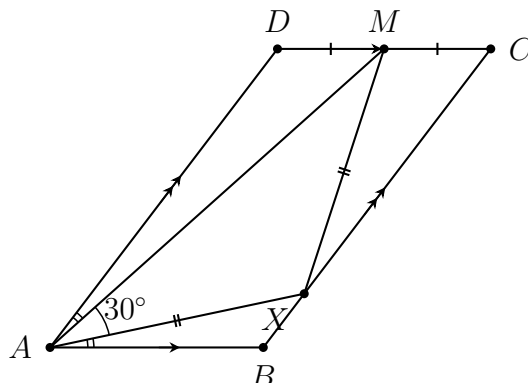
Решение. Так как $AX = XM$ и $\angle MAX = 30^\circ$, то $\angle AMX = 30^\circ$, а значит,

$$AM = \sqrt{3} AX.$$

Треугольники ABX и ADM подобны: $\angle BAX = \angle MAD$, а $\angle ABX = \angle ADM$ из параллельности сторон параллелограмма. Поэтому

$$\frac{AX}{AM} = \frac{BX}{DM} = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Так как M — середина CD , имеем $DM = AB/2$, откуда $BX = AB/(2\sqrt{3})$. Кроме того, $BC = AD = \sqrt{3} AB = 6BX$. Следовательно, $XC = BC - BX = 5BX$.



Ответ. 5.

Задача 23. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, $AB \parallel CD$, $CD > AB = 4$. На прямой CD выбрана точка E так, что $DE = 2$ и D лежит между E и C . Точка M — середина AE . Точки A, B, C, D, M лежат на одной окружности. Найдите MD^2 .

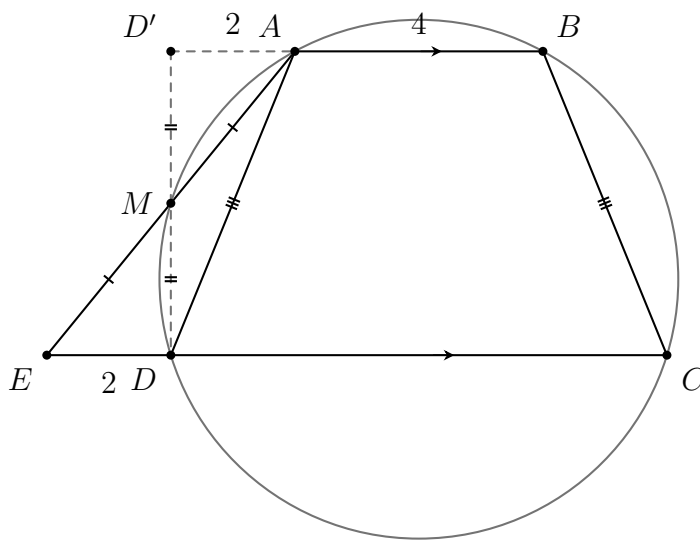
Решение. Отразим D относительно M в точку D' . Так как M — середина как AE , так и DD' , четырёхугольник $ADED'$ является параллелограммом. Поэтому $D'A = DE = 2$ и $D'A \parallel DE \parallel AB$. Так как D лежит между E и C , точка D' лежит на продолжении AB за A , поэтому

$$D'B = D'A + AB = 2 + 4 = 6.$$

Пусть $MD = x$. Тогда $D'M = x$ и $D'D = 2x$. По теореме о степени точки D' относительно окружности

$$D'M \cdot D'D = D'A \cdot D'B.$$

Значит, $x \cdot 2x = 2 \cdot 6$, откуда $x^2 = 6$.



Ответ. 6.

Задача 24. Известно, что

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n}} = \frac{1}{8}.$$

Найдите n .

Решение. Произведение под корнем телескопическое:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Поэтому $1/\sqrt{n} = 1/8$, откуда $\sqrt{n} = 8$ и $n = 64$.

Ответ. 64.