

Математическая игра «Тетрис». 9 класс.

Задача 1. Сколькими способами можно разбить числа $1, 2, \dots, 8$ на четыре неупорядоченные пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была простым числом?

Задача 2. У Пети 10 монет, каждая достоинством 2 или 5 рублей. Общая стоимость двухрублёвых монет больше общей стоимости пятирублёвых. Какое наименьшее число двухрублёвых монет может быть у Пети?



Задача 3. Даны два различных натуральных числа, не превосходящих 2026. Каждую минуту одно из них заменяют средним арифметическим двух имеющихся чисел. Какое наибольшее число минут все возникающие числа могут оставаться целыми?

Задача 4. На координатной плоскости проведены прямые $y = x + 2$, $y = 3x + 4$, $y = 5x + 6$, $y = 7x + 8$, $y = 9x + 10$ и $y = 11x + 12$. На сколько областей они разбивают плоскость?

Задача 5. Семь простых чисел $q_1, \dots, q_7$, не обязательно различных, таковы, что $q_1^2 + \dots + q_7^2$ является квадратом нечётного целого числа. Найдите $q_1 + \dots + q_7$.

Задача 6. Две высоты треугольника равны 10 и 24, а радиус вписанной окружности равен 4. Найдите площадь треугольника.

Задача 7. Все трёхбуквенные слова, составленные из 33 букв русского алфавита, расположены в лексикографическом (словарном) порядке. В слове КОТ случайно и равновероятно выбирают одну из трёх позиций и заменяют стоящую там букву случайно и равновероятно одной из остальных 32 букв. Какова вероятность того, что новое слово будет стоять позже слова КОТ?

Задача 8. В трапеции $ABCD$ основания AB и CD параллельны, $AB = 20$, $CD = 24$, площадь трапеции равна 880. Найдите площадь треугольника, вершины которого — середины отрезков AB , AC и BD .

Задача 9. Последовательность из 36 нулей и единиц начинается с 00000. Среди всех пятёрок подряд встречаются все 32 возможные двоичные пятёрки. Найдите пять последних цифр.

Задача 10. Клетчатый квадрат разрезан на тетрамино. Все пять видов использованы одинаковое число раз; разрешены повороты и отражения. Какова минимальная площадь квадрата?

Задача 11. Найдите наименьшее простое число, представимое в виде суммы квадратов четырёх различных простых чисел.

Задача 12. Положительную дробь назовём удачной, если она равна некоторой положительной дроби, числитель которой на 2 меньше знаменателя. Сколько удачных дробей можно записать со знаменателем 1260?

Задача 13. 44 одинаковых блинчика поровну разделили между 12 людьми. Блинчики разрешалось разрезать. Кусочком назовём каждую получившуюся часть одного блинчика, меньшую целого блинчика. Какое наименьшее число кусочков могло получиться?

Задача 14. По окружности по порядку написаны числа $1, 2, \dots, 20$. Сколькими способами можно выбрать пять чисел так, чтобы между любыми двумя соседними выбранными числами по окружности стояло хотя бы два невыбранных числа?

Задача 15. Сколько существует целых пар (x, y) , удовлетворяющих уравнению

$$2x^2 + y^2 = 2xy + 8x + 49?$$

Задача 16. Натуральные числа a и b таковы, что $\text{НОД}(a, b) = 18$, а $\text{НОК}(a, b) = 27720$. Найдите наименьшее возможное значение $a + b$.

Задача 17. На доске написано число 1. За один ход его заменяют либо на $2x$, либо на $2x + 1$, где x — текущее число. Сколько различных чисел, делящихся на 7, можно получить ровно за 8 ходов?

Задача 18. Миша участвует в часовом велоаезде. Велокомпьютер в любой момент прогнозирует, сколько километров он проедет за оставшееся до конца часа время, считая, что дальше его средняя скорость будет такой же, как с начала заезда. Проехав 1 км за t минут, Миша увидел прогноз d км. За следующие 36 минут он проехал ещё 15 км, после чего компьютер снова показал тот же прогноз d км. Найдите d .

Задача 19. Поезд состоит из 20 вагонов, пронумерованных от 1 до 20 от начала поезда. Некоторые вагоны почтовые. Известно, что почтовых вагонов чётное число; номер ближайшего к началу почтового вагона равен общему количеству почтовых вагонов; номер последнего почтового вагона в четыре раза больше количества почтовых вагонов; каждый почтовый вагон сцеплен хотя бы с одним другим почтовым вагоном. Найдите номера всех почтовых вагонов.

Задача 20. В произведении $481726 \cdot 735941$ в каждом из двух чисел ставят ровно одну запятую между соседними цифрами. Сколько различных значений произведения можно получить?

Задача 21. На фиксированной доске 6×6 выбирают 6 клеток так, чтобы в каждой строке и каждом столбце была выбрана ровно одна клетка, а на обеих главных диагоналях выбранных клеток не было. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 22. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны CD , а точка X лежит на стороне BC . Известно, что $\angle MAX = 30^\circ$, $\angle BAX = \angle MAD$ и $AX = XM$. Во сколько раз XC больше BX ?

Задача 23. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, $AB \parallel CD$, $CD > AB = 4$. На прямой CD выбрана точка E так, что $DE = 2$ и D лежит между E и C . Точка M — середина AE . Точки A, B, C, D, M лежат на одной окружности. Найдите MD^2 .

Задача 24. Известно, что

$$\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n}} = \frac{1}{8}.$$

Найдите n .