

## Шестнадцатый Южный математический турнир

Сириус, 1–9.10.2021

Первый тур. Премьер-лига. 3 октября 2021 г.

1. Арним задумал натуральное число  $x$ , сумма цифр которого равна 2021, а Brentano угадывает его. Своим ходом Brentano называет выбранное им число  $a$ , а Арним сообщает ему сумму цифр числа  $|x - a|$ . Существует ли такое  $N$ , что Brentano гарантированно сумеет отгадать число Арнима за  $N$  ходов?

2. Для каких натуральных  $n$  существует последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , в которой при каждом  $1 \leq i \leq n$  содержится ровно  $a_i$  чисел, кратных  $i$ ?

3.  $BE$  и  $CF$  – высоты разностороннего остроугольного треугольника  $ABC$ . Точка  $D$  диаметрально противоположна точке  $A$  на описанной окружности  $ABC$ . Прямые  $DE$  и  $DF$  пересекают описанную окружность  $ABC$  в точках  $Y$  и  $Z$  соответственно. Докажите, что прямые  $YZ$ ,  $EF$  и  $BC$  пересекаются в одной точке.

4. Положительные числа  $a, b$  и некоторые вещественные числа  $A, B$  удовлетворяют условиям  $|A - 3a| \leq 1 - a$ ,  $|B - 3b| \leq 1 - b$ . Докажите, что

$$\left| \frac{AB}{3} - 3ab \right| \leq 1 - ab.$$

5. Биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную окружность в точке  $W$ . Прямая  $\ell \parallel AC$  проходит через точку  $W$  и пересекает  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $K$  соответственно. Середина стороны  $AC$  равноудалена от точек  $K$  и  $P$ . Докажите, что  $BP = KW$ .

6. На окружности длины 1 сидит кузнечик. Каждую секунду он делает прыжок, перемещаясь на дугу данной иррациональной длины  $\alpha$  против часовой стрелки. Для каждого натурального  $k$  кузнечик помечает точку, в которую он попадает на  $k$ -м прыжке, числом  $k$ . Кузнечик сделал  $n$  прыжков и остановился. Оказалось, что ближайшие к нему с двух сторон отмеченные точки помечены числами  $a$  и  $b$ . Докажите, что  $a + b \leq n$ .

7. В графе с  $n$  вершинами максимальная клика состоит из  $k$  вершин. Докажите, что количество всевозможных клик в этом графе (включая пустую) не превосходит  $3^{\frac{n-k}{2}} 2^k$ . (Клика – это любое множество вершин графа, каждые две из которых соединены ребром.)

8. Найдите все натуральные  $n$ , которые разбиваются в сумму степеней двойки с учётом порядка нечётным числом способов. (Например, у числа 4 шесть разбиений:  $4 = 4 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$ .)

## Шестнадцатый Южный математический турнир

Сириус, 1–9.10.2021

Первый тур. Премьер-лига. 3 октября 2021 г.

1. Арним задумал натуральное число  $x$ , сумма цифр которого равна 2021, а Brentano угадывает его. Своим ходом Brentano называет выбранное им число  $a$ , а Арним сообщает ему сумму цифр числа  $|x - a|$ . Существует ли такое  $N$ , что Brentano гарантированно сумеет отгадать число Арнима за  $N$  ходов?

2. Для каких натуральных  $n$  существует последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , в которой при каждом  $1 \leq i \leq n$  содержится ровно  $a_i$  чисел, кратных  $i$ ?

3.  $BE$  и  $CF$  – высоты разностороннего остроугольного треугольника  $ABC$ . Точка  $D$  диаметрально противоположна точке  $A$  на описанной окружности  $ABC$ . Прямые  $DE$  и  $DF$  пересекают описанную окружность  $ABC$  в точках  $Y$  и  $Z$  соответственно. Докажите, что прямые  $YZ$ ,  $EF$  и  $BC$  пересекаются в одной точке.

4. Положительные числа  $a, b$  и некоторые вещественные числа  $A, B$  удовлетворяют условиям  $|A - 3a| \leq 1 - a$ ,  $|B - 3b| \leq 1 - b$ . Докажите, что

$$\left| \frac{AB}{3} - 3ab \right| \leq 1 - ab.$$

5. Биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную окружность в точке  $W$ . Прямая  $\ell \parallel AC$  проходит через точку  $W$  и пересекает  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $K$  соответственно. Середина стороны  $AC$  равноудалена от точек  $K$  и  $P$ . Докажите, что  $BP = KW$ .

6. На окружности длины 1 сидит кузнечик. Каждую секунду он делает прыжок, перемещаясь на дугу данной иррациональной длины  $\alpha$  против часовой стрелки. Для каждого натурального  $k$  кузнечик помечает точку, в которую он попадает на  $k$ -м прыжке, числом  $k$ . Кузнечик сделал  $n$  прыжков и остановился. Оказалось, что ближайшие к нему с двух сторон отмеченные точки помечены числами  $a$  и  $b$ . Докажите, что  $a + b \leq n$ .

7. В графе с  $n$  вершинами максимальная клика состоит из  $k$  вершин. Докажите, что количество всевозможных клик в этом графе (включая пустую) не превосходит  $3^{\frac{n-k}{2}} 2^k$ . (Клика – это любое множество вершин графа, каждые две из которых соединены ребром.)

8. Найдите все натуральные  $n$ , которые разбиваются в сумму степеней двойки с учётом порядка нечётным числом способов. (Например, у числа 4 шесть разбиений:  $4 = 4 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$ .)