

Девятнадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 22–28.09.2024
Премьер-лига. 1 тур. 23.09.2024

1. Пусть p – нечетное простое число, а a, b, c – целые числа такие, что числа $a^{2023} + b^{2023}$, $b^{2024} + c^{2024}$, $a^{2025} + c^{2025}$ делятся на p . Докажите, что a, b, c делятся на p .

2. Пусть a и b – положительные числа такие, что $a^9 + b^9 = 2$. Докажите, что $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \geq 2$.

3. В остроугольном треугольнике ABC с $CA = CB$ точка E лежит на описанной окружности ABC так, что $\angle ECB = 90^\circ$. Прямая, проходящая через E параллельно CB , пересекает CA в точке F и AB в точке G . Докажите, что центр описанной окружности треугольника EGB лежит на описанной окружности треугольника ECF .

4. n^2 конфет разложены по n коробкам. За один ход можно взять две коробки, содержащие суммарно чётное число конфет, и разложить эти конфеты поровну в эти коробки. При каких натуральных n за несколько ходов заведомо можно разложить конфеты поровну по всем n коробкам?

5. Пусть n – натуральное число. Каково наименьшее число m ($m > n$), при котором множество всех натуральных чисел от n до m (включительно) можно разбить на подмножества так, чтобы в каждом подмножестве одно из чисел равнялось сумме других чисел этого подмножества?

6. Пусть D – точка внутри треугольника ABC , Γ – его описанная окружность, а лучи BD и CD пересекаются с Γ в точках E, F соответственно. Γ_1 и Γ_2 – описанные окружности треугольников ADE и ADF соответственно. Точка X на Γ_2 такова, что BX – касательная к Γ_2 . Пусть BX вторично пересекает Γ в точке Z . Докажите, что прямая CZ – касательная к Γ_1 .

7. Докажите, что при каждом натуральном n среди первых n натуральных чисел, кратных 3, чисел, в двоичной записи которых чётное число единиц, больше, чем чисел, в двоичной записи которых нечётное число единиц.

8. В стране $n \geq 3$ аэропортов и работают n авиакомпаний, выполняющих двусторонние рейсы. Рейсы каждой авиакомпании составляют в точности один нечетный простой цикл по некоторым аэропортам. (Между двумя аэропортами могут летать рейсы нескольких авиакомпаний.)

Докажите, что существует нечетный простой цикл по нескольким аэропортам, в котором все рейсы принадлежат разным компаниям.